Prüfungssituation

Funktionen und Algebra

Korrekturvorlage

10%-Aufgabe 1

Finde $f(0)$ und $f'(0)$ von der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$.

Der lineare Teil ist $8x + 16$, also: $f(0) = 16$, $f'(0) = 8$.

10%-Aufgabe 2

Vereinfache $(x + y)^2 - (x - y)^2$.

$(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + y^2 - 2xy) = 4xy$

20%-Aufgabe 3

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

Differenzieren: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$, Diskriminante von $3x^2 - 4x + 3 = 0$ ist negativ, also keine Extremstellen. Da $f'(0) = 3$ ist $f'(x) > 0$ für alle x - monoton steigend.

20%-Aufgabe 4

Vereinfache den Differenzenquotienten $\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ der Funktion $f(x) = \frac{2}{3x+1}$ so weit wie möglich und bestimme damit $f'(x)$.

Da $f(z) - f(x) = \frac{2}{3z+1} - \frac{2}{3x+1} = \frac{6x-6z}{(3z+1)(3x+1)} = -(z - x) \cdot \frac{6}{(3x+1)(3z+1)}$ ist der Differenzenquotient $\frac{-6}{(3x+1)(3z+1)}$. Daher $f'(x) = \frac{-6}{(3x+1)^2}$.

15%-Aufgabe 5

Vereinfache $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^3yz^2)^5}$.

$\dfrac{y^3z^2}{x^{11}}$.

15%-Aufgabe 6

Von einer linearen Funktion $y = kx + d$ ist bekannt $f(2) = 1$ und $f(5) = 28$. Bestimme k und d.

Direkt $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{28-1}{5-2} = 9$. Also $1 = 9 \cdot 2 + d$ ergibt $d = -17$. Somit $k = 9$ und $d = -17$.

10%-Aufgabe 7

Finde die Nullstellen von $f(x) = (3x - 2)(2 - x)$.

Direkt ablesen: $3x - 2 = 0$ oder $2 - x = 0$, also $x = \frac{2}{3}$ oder $x = 2$.

15%-Aufgabe 8

Finde die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 2x$.

$f(x) = x(x^2 - 2)$, also entweder $x = 0$ oder $x^2 = 2$, also im letzten Fall $x = \pm\sqrt{2}$.

20%-Aufgabe 9

Finde die Nullstellen von $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$.

$x^2 = t$, dann $t^2 - 8t + 1 = 0$ hat als Lösung: $t = 4 \pm \sqrt{15}$ (nach Vereinfachung). Dann also $x = \pm\sqrt{4 + \sqrt{15}}$, $x = \pm\sqrt{4 - \sqrt{15}}$, also 4 Lösungen.

20%-Aufgabe 10

Von einer quadratischen Funktion f ist bekannt: $f(x) = f(-x)$ und $f(3) = 0$ und $f(0) = 3$. Bestimme einen Term für $f(x)$.

f ist symmetrisch: $f(x) = ax^2 + b$, da $f(0) = 3$, $b = 3$. Dann $f(3) = 0$, also $a \cdot 9 + 3 = 0$, also $a = -\frac{1}{3}$ - ja, du musst $\frac{3}{9}$ zu vereinfachen!

20%-Aufgabe 11

Von einer kubischen Funktion ist bekannt $f(4) = f(2) = f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Bestimme einen Termausdruck für $f(x)$.

Da die Nullstellen bekannt sind, ist schon klar, dass $f(x) = a \cdot x(x-2)(x-4)$. Daher $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 8ax$ Differenzieren und bei $x = 0$ evaluieren ergibt $f'(0) = 8a$. Somit $a = \frac{1}{8}$, also $f(x) = \frac{x}{8}(x-2)(x-4)$.

10%-Aufgabe 12

Gegeben ist $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Bestimme $f(0)$.

Direkt einsetzen: $f(0) = -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -4 = 24$.

10%-Aufgabe 13

Wie oft passt eine Strecke von $32 \cdot 10^{-5}$ Meter in 32 Kilometer? Bitte in Worten ausdrücken!

$\frac{32000}{32 \cdot 10^{-5}} = 10^8$ also Hundertmillion mal.

10%-Aufgabe 14

Finde mindestens zwei Teiler von $17^2 - 1$, die kleiner als 100, aber größer als 10 sind.

Direkt die 3. Binom'sche Formel ($(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$) benutzen: $17^2 - 1 = (17-1)(17+1) = 16 \cdot 18$. Also 16 und 18. Andere gibt es auch: 12, 24, 48, 36, 72, 96.

10%-Aufgabe 15

Von einer Geraden $g:\ ax - y = 9$ ist bekannt, dass sie parallel zum Graphen der Funktion $f(x) = 2x - 1$ ist. Bestimme a.

Geraden sind parallel, wenn die Steigung gleich (also 2) ist: bei g finden wir $y = ax - 9$. Daher $a = 2$.

10%-Aufgabe 16

Gib eine Termdarstellung eines Polynoms von Grad 4, sodass dieses Polynom keine Nullstellen hat.

Mehrere Möglichkeiten: Zum Beispiel $x^4 + 1$, $(x^2 + 1)^2$, ...