

Zweite Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 14.01.2016
Korrekturvorlage

Aufgabe 1. (2P) Mengenlehre.

Betrachten Sie die folgenden Mengen:

$A = [-5; 5]$; also A besteht aus allen reellen Zahlen x mit $-5 \leq x \leq 5$.

$C = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$; also C besteht aus Potenzen 2^k mit k eine positive natürliche Zahl.

Kreuzen Sie die richtige Aussage an!

<input type="checkbox"/>	$A \subset C$.
<input type="checkbox"/>	$A \cap C = A$.
<input checked="" type="checkbox"/>	$A \cap C = \{1, 2, 4\}$.
<input type="checkbox"/>	$A \cup C \subset \mathbb{Z}$.
<input type="checkbox"/>	$A \cup C$ hat nur endlich viele Elemente.

Kommentar $A \cup B$ ist die Vereinigung, also alles von A und B zusammen. $A \cap B$ ist der Durchschnitt von A und B , also das, was A und B gemeinsam haben. Somit gilt $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$. Auch verstehen musst du $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$.

Lerne auswendig:

$x \in A \cup B \implies x \in A$ oder $x \in B$.

$x \in A \cap B \implies x \in A$ und $x \in B$.

Aufgabe 2. (2P) Umformen.

Gegeben ist $y = \frac{ab}{cd - 1}$.

Drücken Sie c in den anderen Variablen aus!

$$c = \frac{ab+y}{yd}$$

Aufgabe 3. (2P) Differential- und Differenzenquotienten Interpretieren.

Ein Fahrradfahrer fährt durch das sonnige, südliche Burgenland. Die Funktion $s(t)$ beschreibe den zurückgelegten Weg (in km) als Funktion der Zeit (t ist die Zeit in Stunden), wobei $t = 0$ mit dem Anfang der Fahrt und $t = 4$ mit dem Ende der Fahrt korrespondiert. Interpretieren Sie $s'(2)$ und $\frac{1}{2}(s(4) - s(2))$!

Antwort 1. $s'(2)$ bedeutet: Momentangeschwindigkeit bei $t = 2$.

Antwort 2. $\frac{s(4)-s(2)}{2}$ bedeutet: die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[2; 4]$.

Aufgabe 4. (2P) Turm von Babel.

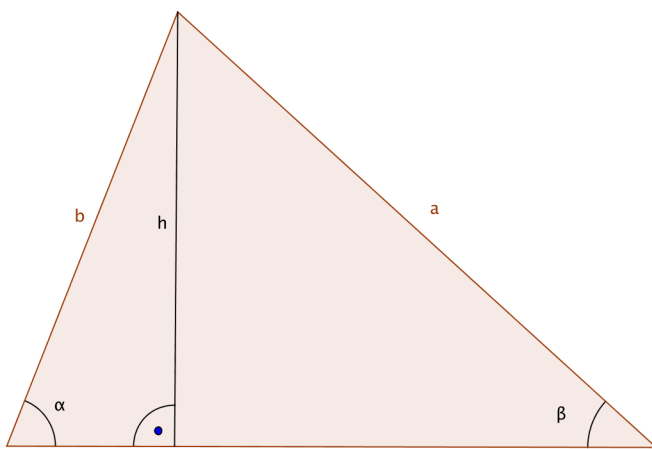
An einem sonnigen Tag beobachtet ein Tourist einen hohen Turm. Der Tourist misst den Winkel, unter dem er die Sonne sieht, und der Winkel beträgt 35 Grad. Somit machen die Sonnenstrahlen einen Winkel von 35 Grad mit einer horizontalen Ebene. Der Turm wirft einen Schatten auf einen horizontalen Platz. Der Schatten hat eine Länge von 175 Meter.

Bestimmen Sie die Höhe des Turms!

Antwort: Die Höhe des Turms beträgt: $175 \cdot \tan(35^\circ) \approx 122,5m$.

Aufgabe 5. (2P) Dreieck.

Betrachten Sie das folgende Dreieck und kreuzen Sie alle zutreffenden Aussagen an!



<input type="checkbox"/>	$a \tan \alpha = b \tan \beta.$
<input checked="" type="checkbox"/>	$a \sin \beta = b \sin \alpha.$
<input type="checkbox"/>	$a \cos \beta = b \cos \alpha.$
<input checked="" type="checkbox"/>	$h^2 = ab \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta.$
<input checked="" type="checkbox"/>	$\frac{h}{ab} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}.$

Kommentar: $h = a \cdot \sin(\beta) = b \cdot \sin(\alpha)$. Also (so wie im Unterricht): $\frac{h}{ab} = \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$.
Auch $h^2 = a \cdot \sin(\beta) \cdot b \cdot \sin(\alpha) = ab \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

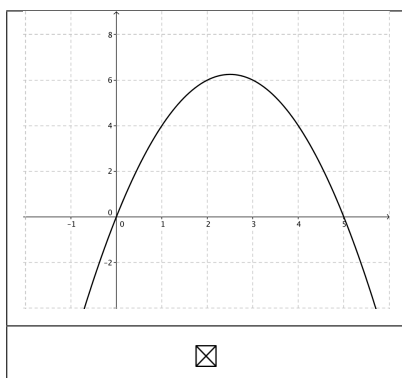
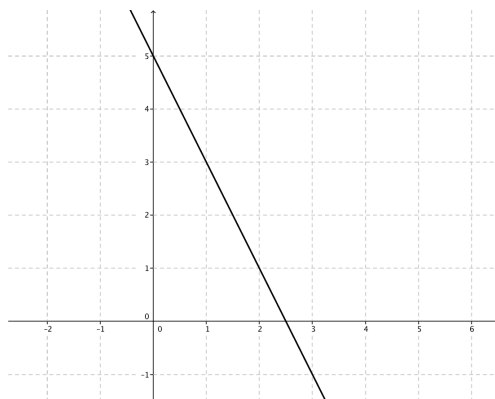
Aufgabe 6. (2P) Krümmung einer Funktion bei 0.

Betrachten Sie die Funktion $c(t) = t^5 - 8t^2 + 3$. Bestimmen Sie $c''(0)$ und geben Sie an, ob c bei der Stelle $t = 0$ eine Linkskrümmung oder eine Rechtskrümmung.

Antwort: $c''(0) = -16$ und an der Stelle $t = 0$ hat die Funktion c *Rechtskrümmung*.

Aufgabe 7. (2P) Graphen 1.

Hier rechts sehen Sie den Graphen der ersten Ableitung einer Funktion F . Kreuzen Sie hier unten den Graphen an, der die Funktion F richtig darstellt!



Kommentar: Nur eine Parabel kommt in Betracht. Da die Parabel das Muster „Steigend–Fallend“ hat, hat sie die Form eines Berges.

Aufgabe 8. (2P) Lineare Funktion.

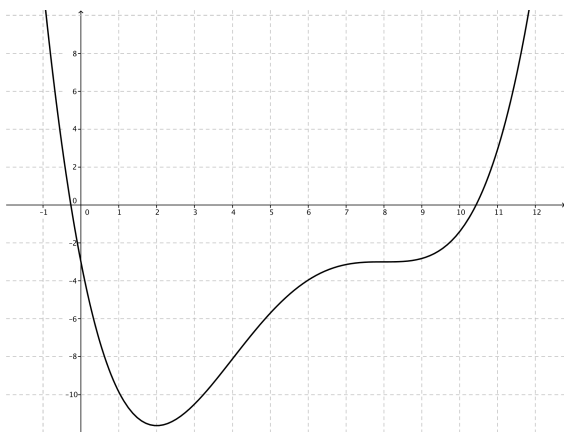
Sei $q(x) = ax + b$ eine lineare Funktion. Die Punkte $(-3|5)$ und $(2|100)$ liegen auf dem Graphen von q . Bestimmen Sie a und b !

$$a = \frac{100-5}{2-(-3)} = 19.$$

$$b = 5 + 3 \cdot 19 = 62.$$

Aufgabe 9. (2P) Funktionseigenschaften.

Betrachten Sie den dargestellten Graphen der Funktion f . Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen über f an!



<input type="checkbox"/>	f ist eine quadratische Funktion.
<input type="checkbox"/>	Im Intervall $[4; 10]$ gilt $f'(x) > 0$.
<input checked="" type="checkbox"/>	$f'(8) = f''(8) = 0$.
<input type="checkbox"/>	f besitzt keine Wendestelle.
<input checked="" type="checkbox"/>	f ist monoton steigend auf dem Intervall $[2; 10]$.

Aufgabe 10. (2P) Besondere Stellen.

Betrachten Sie die Funktion $g(x) = x^4 - 4x^2 + 4$. Vervollständigen Sie so, dass ein mathematisch korrekter Satz entsteht!

Die Funktion g hat bei $x = 0$ ① _____, weil ② _____.

Möglichkeiten für ①	
ein lokales Minimum	
ein lokales Maximum	X
eine Wendestelle	

Möglichkeiten für ②	
$f'(0) = 0$ und $f''(x) = 0$	
$f'(0) \neq 0$ und $f''(x) = 0$	
$f'(0) = 0$ und $f''(x) < 0$	X

Aufgabe 11. (2P) Parameter bestimmen I.

Betrachten Sie die Funktion $h(x) = x^3 + tx^2 + 4x$. Bestimmen Sie für welche Werte von t die Funktion h monoton steigend ist!

Antwort: Die Funktion h ist monoton steigend, wenn $t \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.

Kommentar: Die Funktion h ist monoton steigend, wenn $h'(x) \geq 0$ für alle x . Da $h'(x) = 3x^2 + 2tx + 4$ (eine Parabel) impliziert dies $3x^2 + 2tx + 4 \geq 0$, dass diese Parabel höchstens eine Nullstelle hat, somit muss gelten, dass die Diskriminante von $3x^2 + 2tx + 4$ nicht positiv ist. Somit $D = 4t^2 - 48 \leq 0$, also $t^2 \leq 12$ sodass $-\sqrt{12} \leq t \leq \sqrt{12}$, da $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ folgt die Antwort oben.

ACHTUNG: Wenn $x^2 \leq p$, dann $-\sqrt{p} \leq x \leq \sqrt{p}$. Also, aus $x^2 \leq p$ folgt nicht $x \leq \sqrt{p}$.

Aufgabe 12. (2P) Parameter bestimmen II.

Gegeben ist die Funktion $p(x) = x^2 + bx + 1$. Bestimmen Sie b so, dass die Tangente in $(0|1)$ am Graphen von p parallel zur Geraden $g: 2x - 5y = 0$ ist.

Antwort: $b = 2/5$. Weil die Gerade g Steigung $2/5$ hat.

TEIL 2

Aufgabe 1. Kubisches Polynom

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

- (a). (2 Kompensationspunkte) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f .
 (b). (2 Punkte) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extremen und den Wendepunkt.
 (c). (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die drei bei (b) gefundenen Punkte auf einer Geraden liegen.

(a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$. Also Extremstellen bei $x = -\frac{2}{3} \pm \frac{1}{6}\sqrt{7}$, also bei $x_1 \approx 0,215$ und $x_2 \approx -1,549$.

(b) Wendepunkt bei $x = -\frac{2}{3}$. Einsetzen ergibt (nach Rundung): lokales Minimum $(0,215; -2,113)$, lokales Maximum $(-1,549; 0,631)$ und Wendepunkt $(-\frac{2}{3}; -\frac{20}{27})$.

(c) Methode 1: Die Gerade durch die Extremen hat Steigung $k_1 = \frac{-2,113 - 0,631}{0,215 + 1,549} \approx \dots$. Die Gerade durch das Maximum und den Wendepunkt hat Steigung $k_2 = \frac{0,631 + 20/27}{-1,549 + 0,667}$ und man sieht, dass zu großer Genauigkeit $k_1 = k_2$. Die beiden Geraden gehen durch das Maximum und haben dieselbe Steigung; sie sind somit gleich und die drei Punkte liegen auf dieser Geraden.

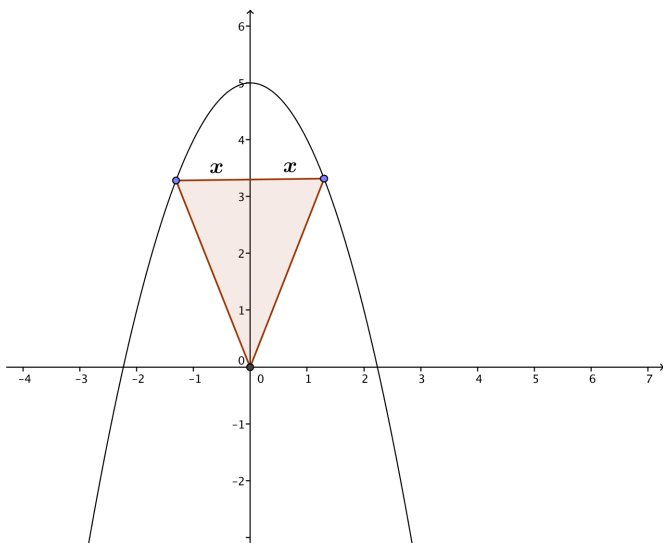
Methode 2: Finde die Gerade $y = kx + d$ die durch zwei der drei Punkte geht, zB durch die Extremen – also bestimme k und d . Kontrolliere dann, dass der Wendepunkt auch darauf liegt; also $-\frac{20}{27} = k \cdot \frac{-2}{3} + d$.

Aufgabe 2. Großes Dreieck unter Parabel.

Betrachten Sie die Parabel $p : y = 5 - x^2$. Der Punkt O ist der Ursprung und A und B sind zwei Punkte auf der Parabel p mit derselben positiven zweiten Koordinate. Somit ist das Dreieck $\triangle OAB$ gleichschenkelig.

(4 Punkte) **Fragestellung:** Wie sind A und B zu wählen, dass das gleichschenklige Dreieck $\triangle OAB$ den größtmöglichen Flächeninhalt hat?

Siehe Skizze



Das Dreieck hat Basis $2x$ und Höhe $5 - x^2$. Somit ist die Fläche $A(x) = x(5 - x^2) = 5x - x^3$. Dies ist maximal wenn $A'(x) = 5 - 3x^2 = 0$, also $x = \pm\sqrt{5/3}$. Somit sind A und B die Punkte $(\sqrt{5/3}; 10/3)$ und $(-\sqrt{5/3}; 10/3)$.

Aufgabe 3. Funktion bestimmen.

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat eine Terrassenstelle bei $x = -2$. Des Weiteren gelten $f(-2) = -3$ und $f(0) = 13$.

(3 Punkte) **Fragestellung:** Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift von f .

Die zweite Ableitung und erste Ableitung verschwinden bei $x = -2$. Also $f'(x) = a(x + 2)^2 = ax^2 + 4ax + 4a$. Daher $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + 2ax^2 + 4ax + b$. Da $f(0) = 13$ muss $b = 13$ gelten. Dann $x = -2$ einsetzen ergibt: $-\frac{8a}{3} + 8a - 8a + 13 = -3$. Also $8a = 3 \cdot 16 = 48$ und daher $a = 6$. Somit $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 24x + 13$.

Alternativ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 13$, dann $f'(-2) = 0$, $f''(-2) = 0$ und $f(-2) = -3$ benutzen um a , b und c zu bestimmen. Also, löse folgende Gleichungen:

(1) $-8a + 4b - 2c + 13 = -3$

(2) $12a - 4b + c = 0$, also $c = 4b - 12a$

(3) $-12a + 2b = 0$, also $b = 6a$. Mit (2) ergibt das $c = 12a$. Und so weiter.

Aufgabe 4. Freier Fall

Ein frei fallender Körper legt in der Zeit t den Weg $s(t) = 4,9 \cdot t^2$ zurück (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter).

- (a) (2 Kompensationspunkte) Welchen Weg legt der Körper in 15 Sekunden zurück?
(b) (2 Kompensationspunkte) Gib eine Formel für die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t an! Geben Sie dabei an, ob die Geschwindigkeit linear oder quadratisch mit der Zeit zunimmt!
(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie, nach wie viel Zeit die Geschwindigkeit 40 m/s erreicht, und bestimmen Sie welchen Weg der fallende Körper dann zurückgelegt hat.

(a) $s(15) = 4,9 \cdot 225 \approx 1102,5$ Meter.

(b) $v(t) = s'(t) = 9,8 \cdot t$. Eine lineare Funktion!

(c) $v(t) = 40$, also $t = \frac{40}{9,8} \approx 4,08$ Sekunden. Dieses Ergebnis dann in $s(t)$ einsetzen:
 $s(4,08) \approx 81,6$.

Aufgabe 5. Fibonacci-Polynome

Die Fibonacci-Folge ist eine sehr bekannte Folge natürlicher Zahlen. Interessanterweise findet man die Fibonacci-Folge oft unerwartet in anderen Bereichen und Anwendungen der Mathematik wieder. So findet man in der Verteilung der Sonnenblumenkerne in der Blume ein Muster, das sich mit der Fibonacci-Folge beschreiben lässt. Auch bei der Verteilung der Zapfen bei den Tannenbäumen taucht die Fibonacci-Folge auf - und damit nicht genug, bei vielen Verteilungsproblemen von Blättern oder Ästen wählen Pflanzen ein Muster, das sich mit der Fibonacci-Folge beschreiben lässt.

Obwohl die Fibonacci-Folge wahrscheinlich einem jeden bekannt ist, so gebe ich hier die ersten sieben Zahlen:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13$$

Die n . Fibonacci-Zahl lässt sich durch die Summe der vorigen zwei berechnen. In Formelsprache $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Eine solche Rechenvorschrift ist zwar relativ bequem, eine Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(n) = a_n$ wäre bequemer. Die große Enttäuschung ist, dass dies nicht so leicht geht. Man kann eine Annäherung mit Polynomen versuchen. Betrachten Sie jetzt folgende Aussagen:

A1: Das Polynom $F_0(x) = 1$ hat Grad Null und erfüllt $F_0(0) = a_0$.

A2: Ein Polynom $F_1(x)$ von Grad 1 mit $F_1(0) = a_0$ und $F_1(1) = a_1$ existiert nicht.

A3: Ein Polynom $F_2(x)$ von Grad 2 mit $F_2(0) = a_0$, $F_2(1) = a_1$ und $F_2(2) = a_2$ existiert!

(a) (2 Punkte) Beweisen Sie Aussage A2!

(b) (2 Punkte) Beweisen Sie Aussage A3 indem Sie die Funktionsvorschrift des gesuchten Polynoms zweiten Grades $F_2(x)$ angeben.

(a) Als Ansatz nehmen wir $F_1(x) = kx + d$ und finden dann $k = 0$, also hat F_1 Grad 0.

(b) Methode 1: $F_2(x) = ax^2 + bx + c$. $F_2(0) = c = 1$, $F_2(1) = a + b + c = 1$, also $a + b + 1 = 1$, also $a + b = 0$ sodass $a = -b$. Weiter $F_2(2) = 2$ ergibt $4a + 2b + c = 2$ also $4a - 2a + 1 = 2$, sodass $2a = 1$. Insgesamt $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ und $c = 1$, sodass $F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} + 1$.

Methode 2: Da F_2 Grad 2 hat und $F_2(0) = F_2(1)$ muss die Symmetrieachse bei $x = \frac{1}{2}$ liegen, also das Maximum ist bei $x = \frac{1}{2}$. Daher, wenn $F_2(x) = ax^2 + bx + c$ sieht man, $2ax + b = 0$ wenn $x = \frac{1}{2}$, sodass gleich $a = -b$ folgt. Wie oben ist natürlich $c = 1$, sodass $F_2(x) = ax^2 - ax + 1$ und dann $F_2(2) = 2$ benutzen ergibt $4a - 2a = 1$, also $a = \frac{1}{2}$.