Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 31.03.2016
Wiederholung für Abwesende

Korrekturvorlage

Aufgabe 1. (2P) **Funktionen mit Potenzen**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3^{5x}$.

Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die Bruchzahl x, sodass $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und schreiben Sie das Ergebnis in der Form $x = \frac{a}{b}$ mit a und b ganze Zahlen.

$x = -0,1 = -\frac{1}{10}$

Aufgabe 2. (2P) **Cosinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an:

1. ☒	Die Funktion f hat im Intervall $[0; 1]$ genau eine Nullstelle.
2. ☒	Die Funktion f hat ein Maximum an der Stelle $x = 0$.
3. ☐	$f(k) = 3$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
4. ☐	Die Funktion f ist monoton fallend.
5. ☒	Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ beträgt 0.

Aufgabe 3. (2P) **Sinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{15} \cdot x\right)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Periode von f und die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$.

Antwort:

Periode = $\frac{30}{7}$,

Steigung der Tangente bei $x = 0$ beträgt:$\frac{21\pi}{15}$.

Aufgabe 4. (2P) **Sekante und Tangente einer Parabel**.

Gegeben ist die Parabel $y = \frac{x^2}{3} + 2x$ und die Punkte $A = (0|0)$ und $B = (6|24)$ auf der Parabel.

Bestimmen Sie die Koordinaten des (einzigen) Punktes C auf der Parabel, in dem die Tangente zur Parabel parallel zur Sekante durch A und B ist.

$C = (3|9)$ $\qquad$ $y' = \frac{2x}{3} + 2$, die Sekante hat Steigung 4, somit $x = 3$.

Aufgabe 5. (2P) **Halbwertszeit**.

Ein Physiker misst die Menge eines radioaktiven Stoffes. Der Zerfall gehorcht dem Gesetz $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$, wobei N_0 die Anfangsmenge zur Zeit $t = 0$ und τ die Halbwertszeit (in Tagen) ist. Die Ergebnisse sind teilweise in der Tabelle dargestellt:

Zeit (Tage)	0	1	2	3
Menge (Gramm)	200	180	162	145,8

Aufgabenstellung: Ergänzen Sie die Tabelle und bestimmen Sie die Halbwertszeit τ (in Tagen).

Antwort:

$\tau = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,6$ Tage. $\qquad$ Aus der Tabelle $N(t) = 200 \cdot (0,9)^t$.

Fehlender Wert in der Tabelle $= 145,8$.

Aufgabe 6. (2P) **Ableitungen und Extremum**.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2 e^{-ax}$ mit $a > 0$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Wert von a so, dass f ein Extremum an der Stelle $x = 2$ hat.

Antwort: $a = 1$.

Denn $f'(x) = xe^{-ax}(2 - ax)$ und $f(2) = 0$ impliziert dann $a = 1$.

Aufgabe 7. (2P) **Indirekt Proportional zu einander**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibe eine **indirekte Proportionalität**. Das heißt, dass $f(x)$ indirekt proportional zu x ist.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

1. ☐	Der Graph von f geht durch den Ursprung.
2. ☒	Das Produkt $x \cdot f(x)$ ist für alle x gleich.
3. ☐	Das Verhältnis $f(x) : x$ ist für alle x gleich.
4. ☒	Der Graph von f ist eine Hyperbel.
5. ☐	$f(x+1) - f(x)$ ist unabhängig von x, also, für alle x gleich.

Aufgabe 8. (2P) **Differenzierregeln**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 5x^3 + 5\cos(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

(1) ☒	$f(0) = 5$
(2) ☐	$f'(0) = -5\pi$
(3) ☐	$f'(\pi) = 15\pi^2$
(4) ☐	$f(1) = 5$
(5) ☒	$f''(0) = -5\pi^2$

Aufgabe 9. (2P) **Lineare Funktionsgleichung**.

Die Funktion $f(x) = xe^x$ geht durch den Punkt $(1|e)$. Der Graph der linearen Funktion $h(x) = kx + d$ berührt den Graphen von f im Punkt $(1|e)$ und daher ist der Graph von h eine Tangente von f im Punkt $(1|e)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Parameter k und d in der Funktionsgleichung von h.

Antwort: $k = 2e, \quad d = -e.$ $f'(x) = (x+1)e^x$, also $k = f'(1) = 2e$.

Aufgabe 10. (2P) **Funktionen und ihre Ableitungen**.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 + ax + 5$ wobei $a \in \mathbb{R}$. Davon abhängig, welchen Wert a hat, hat diese Funktion (i) zwei Extremstellen und einen Terrassenpunkt, (ii) einen Terrassenpunkt und keine Extremstellen, oder (iii) sie ist monoton steigend.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Werte von a, sodass f monoton steigend ist!

Antwort: $a \geq 0$

Aufgabe 11. (2P) **Maximum und Minimum**.

Die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ hat erste Ableitung f' und zweite Ableitung f'' gegeben durch

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}.$$

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie das Extremum der Funktion f und ob es sich hierbei um ein Maximum oder ein Minimum handelt!

Antwort: Das Extremum befindet sich an der Stelle $x = -1$und es betrifft ein ~~Maximum~~ / Minimum. (Durchstreichen was nicht zutrifft.)

Aufgabe 12. (2P) **Ableitungen und Funktionen**.

Gegeben sind 5 reelle Funktionen.

Aufgabenstellung: Ordnen Sie jeder Funktion die richtige erste Ableitung zu:

$f(x) = e^{3x}$	F
$f(x) = 3e^{3x}$	D
$f(x) = 3^x$	A
$f(x) = -e^{-3x}$	E
$f(x) = -3^{-x}$	C

A	$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$
B	$f'(x) = -\ln(3) \cdot 3^{-x}$
C	$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^{-x}$
D	$f'(x) = 9e^{3x}$
E	$f'(x) = 3e^{-3x}$
F	$f'(x) = 3e^{3x}$

Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 31.03.2016

Wiederholung für Abwesende

VERTIEFUNGSTEIL
Korrekturvorlage

Aufgabe 1. *Kubische Funktionen.*

Betrachten wir kubische Funktionen von der Form $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, wobei $a < b < c$ drei unterschiedliche, reelle Zahlen sind.

(a) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie die drei Nullstellen von f.

(b) (4P) Durch Ausmultiplizieren findet man $f(x) = x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$. Bestimmen Sie $f'(x)$ und bestimmen Sie die Diskriminante D der quadratischen Gleichung $f'(x) = 0$. Begründen Sie, dass diese Diskriminante D größer als Null ist. Drücken Sie die Extremstellen von f in a, b, c und D aus.

Hinweis: Die Identität $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ ist hilfreich.

(c) (2P) Bestimmen Sie $f''(x)$ und die Wendestelle von f.

(d) (2P) Sei jetzt $b = 0$ und $a = -2c = -2$. Finden Sie den Punkt P auf dem Graphen von f, in dem die Tangente parallel zur Tangente im Punkt $Q = (-2|0)$ ist, und wobei $P \neq Q$.

(a) $x = a$, $x = b$, $x = c$

(b) $f'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+ac+bc)$, $f'(x) = 0$ hat somit Diskriminante $4(a+b+c)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (ab+ac+bc) = 4a^2+4b^2+4c^2-4ac-4ab-4bc$. Diese Diskriminante muss positiv sein, da der Graph einer kubischen Funktion mit drei Nullstellen mindestens zwei Extremstellen haben muss, also muss $D > 0$ gelten. Rechnerisch sieht man das ein, wenn man bemerkt, dass

$$D = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4ac - 4bc = 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + 2(a-c)^2$$

und das ist zweimal eine Summe von Quadraten und da a, b und c unterschiedlich sind, ist jeder Term > 0, somit auch D. Die Lösungen von $f'(x) = 0$ sind dann

$$x_1 = \frac{2a+2b+2c+\sqrt{D}}{6} = \frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + 2(a-c)^2}$$

und

$$x_2 = \frac{2a+2b+2c-\sqrt{D}}{6} = \frac{a+b+c}{3} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + 2(a-c)^2}$$

und x_1 und x_2 liegen somit symmetrisch um den Punkt $x_0 = \frac{a+b+c}{3}$, was dem Mittelwert von a, b und c entspricht und mit der Wendestelle korrespondiert.

(c) $f''(x) = 6x - 2(a+b+c)$ also $f''(x) = 0$ impliziert $x = \frac{a+b+c}{3}$, so wie erwähnt, die Wendestelle.

(d) $f(x) = x(x-1)(x+2) = x^3 + x^2 - 2x$. Also $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ und $f'(-2) = 12 - 4 - 2 = 6$. Somit ist zu lösen $3x^2 + 2x - 2 = 6$, also $3x^2 + 2x - 8 = 0$. Somit

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6}$$

die Lösung $x = -2$ brauchen wir jetzt nicht, sondern $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, somit ist $P = (\frac{4}{3}|\frac{40}{27})$.

Aufgabe 2. *Ventil eines Autos.*

Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine ebene Straße. Wir betrachten jetzt eines seiner Räder. Dieses Rad rollt also mit einer konstanten Geschwindigkeit und somit ist die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde konstant. Der Durchmesser des Rads ist 75cm. Das Ventil befindet sich auf 30cm des Mittelpunktes des Rads. Das Rad dreht sich in $0,2$ Sekunden einmal um die Achse.

Die Höhe $h(t)$ (in Centimeter) des Ventils über der Straße in Abhängigkeit der Zeit t (in Sekunden) kann durch eine Formel

$$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + c$$

beschreiben. Die Höhe $h = 0$ korrespondiert mit der Oberfläche der Straße.

(a) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie den Parameter a in der Formel für $h(t)$.

$a = 30$ (cm)

(b) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie die Parameter b und c in der Formel für $h(t)$.

$b = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi$, $c = 37,5$ (cm); die Höhe des Mittelpunktes des Rads.

(c) (2P) Ermitteln Sie eine Formel für die vertikale Geschwindigkeit $v_y(t)$ des Ventils (in cm/s).

$v_y(t) = h'(t) = ab\cos(bt) = 300\pi \cdot \cos(10\pi t)$

(d) (2P) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der das Auto fährt (in cm/s oder m/s).

Das Rad hat einen Umfang von $\pi \cdot 75 = 75\pi$ cm, das Rad dreht in einer Sekunde 5mal um die Achse, also werden in einer Sekunde 375π cm zurückgelegt. Das ist die Geschwindigkeit des Autos.

(e) (2P) Ermitteln Sie eine Formel für die horizontale Geschwindigkeit $v_x(t)$ des Ventils (in cm/s).

Die relative horizontale Geschwindigkeit zwischen Achse und Ventil ist $u_x(t) = 300\pi \cdot \sin(10\pi t)$. Dies hätte man auf mehrere Weisen finden können: (1) die horizontale Position des Ventils bezüglich der Achse des Rades ist $(\pm)a \cdot \cos(b \cdot t)$ - wie die Höhe, nur dann mit dem Cosinus, und dies differenzieren ergibt (bis auf $\pm$) die relative horizontale Geschwindigkeit, (2) das Rad legt pro Umdrehung $2\pi 30 = 60\pi$ cm zurück, also pro Sekunde 300π. Da $(u_x)^2 + (v_y)^2$ genau $(300\pi)^2$ sein sollte, folgt wieder (bis auf $\pm$) $u_x(t) = 300\pi \cdot \sin(10\pi t)$.

Mit dem Ergebnis ist dann die wirkliche horizontale Geschwindigkeit die Summe aus der relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der Achse (also, des Autos). Somit $v_x(t) = 375\pi + 300\pi \sin(10\pi t)$.

(f) (2P) Benutzen Sie Ihre Antwort bei (e) um eine Formel für die Größe der Gesamtgeschwindigkeit (also das Tempo) des Ventils zu bestimmen. Falls Sie (e) nicht haben, nehmen Sie $v_x(t) = 10 + 100\sin(bt)$, wobei b aus (b) zu entnehmen ist.

$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = \sqrt{(375\pi)^2 + (300\pi^2) + (\pm)225000\pi^2 \sin(10\pi t)}$ (kann man etwas vereinfachen)

$v(t) = \pi\sqrt{230625 + (\pm)225000\sin(10\pi t)}$

Aufgabe 3. *Maximaler Winkel.*

Gegeben sind die zwei Punkte $A = (3|0)$ und $B = (4|0)$ und es bezeichne O den Ursprung des Koordinatensystems. Von einem Punkt $C = (0|c)$ auf der zweiten Achse sieht man die Strecke AB unter einem Winkel α. Betrachten wir das Dreieck $\triangle AOC$, so gilt

$$\tan(\angle OCA) = \frac{3}{c}, \quad \angle OCA = \arctan\left(\frac{3}{c}\right)$$

Betrachten wir das Dreieck $\triangle BOC$ so gilt

$$\tan(\angle OCB) = \frac{4}{c}, \quad \angle OCB = \arctan\left(\frac{4}{c}\right).$$

(a) (1 Kompensationspunkt) Finde eine Beziehung zwischen α und c. M.a.W. geben Sie einen Term für α in der Variable c an!

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{c}\right) - \arctan\left(\frac{3}{c}\right)$

(b) (2 Punkte) Finden Sie den Punkt C auf dem positiven Teil der zweiten Achse (sodass also $c > 0$), unter dem die Strecke AB am größten gesehen wird.

Hinweis: Die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan(x)$ ist $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, wobei Winkel selbstverständlich in Bogenmaß gemessen werden.

α nach c differenzieren und das Null setzen:

$$\frac{1}{1+\frac{16}{c^2}} \cdot \frac{-4}{c^2} - \frac{1}{1+\frac{9}{c^2}} \cdot \frac{-3}{c^2} = 0$$

und das vereinfachen (zuerst mal mit c^2 multiplizieren) ergibt

$$\frac{48}{c^2} - \frac{36}{c^2} = 1$$

und somit $c = \pm\sqrt{12}$; gefragt ist die positive Wurzel/Lösung.

Aufgabe 4. *Umkehrfunktionen*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist definiert durch

$$f(x) = xe^x .$$

(2P) Entscheiden Sie, ob die Funktion f eine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ besitzt. Begründen Sie Ihre Entscheidung!

Mit Differenzieren findet man $f'(x) = (x+1)e^x$ und für alle $x > 0$ ist also $f'(x) > 0$. Somit ist f eine monoton steigende Funktion und somit gehört zu jedem f-Wert auch genau ein x-Wert. Daher ist f umkehrbar; es gibt eine Umkehrfunktion!