Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 7A G am 08.03.2016
Korrekturversion

Aufgabe 1. (2P) **Funktionen mit Potenzen**.

Gegeben ist der Funktionswert $\sqrt[3]{25}$ von der Funktion $f(x) = 5^x$.

Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die reelle Zahl x, sodass $f(x) = \sqrt[3]{25}$.

$x = 2/3$

Aufgabe 2. (2P) **Cosinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die 2 zutreffenden Aussagen an:

1. ☐	Die Funktion f hat genau eine Nullstelle.
2. ☒	$f(x+1) = -f(x)$.
3. ☐	$f(0) = 0$.
4. ☐	Die Funktion f ist monoton fallend.
5. ☒	Die Steigung von f an der Stelle $x = 0$ beträgt 0.

Auswendig zu wissen: $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ *und* $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$. *Begründung mit Einheitskreis ist Basisverständnis.*

Aufgabe 3. (2P) **Sinusfunktion**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{20} \cdot x\right)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Periode von f und die Steigung der Tangente an der Stelle $x = 0$.

Antwort:

Periode $= \frac{2\pi}{b} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$, Steigung der Tangente bei $x = 0$ beträgt: $6 \cdot \frac{3\pi}{20} = \frac{9\pi}{10}$.

Aufgabe 4. (2P) **Halbwertszeit**.

Im unterstehenden Diagramm ist die Menge $N(t)$ der noch nicht zerfallenen Atome eines radioaktiven Elements (in Gramm) als Funktion der Zeit t dargestellt (in Tagen). Der Zerfall gehorcht dem Gesetz $N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/\tau}$, wobei N_0 die Anfangsmenge zur Zeit $t = 0$ und τ die Halbwertszeit (in Tagen) ist.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Halbwertszeit τ.

Antwort: $\tau = 25 Tage$.

Aufgabe 5. (2P) **Ableitungen und Maximum**.

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = xe^{-ax}$ mit $a > 0$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie den Wert von a so, dass f ein Extremum an der Stelle $x = 2$ hat.

Antwort: $a = \frac{1}{2}$.

Differenzieren ergibt: $f'(x) = e^{-ax} - axe^{-ax} = e^{-ax}(1 - ax)$*. Das muss bei Null verschwinden, also* $1 - a2 = 0$*. Daher die Antwort.*

Aufgabe 6. (2P) **Proportional zu einander**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschreibe eine direkte Proportionalität. Das heißt, dass $f(x)$ direkt proportional zu x ist.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

1. ☒	Der Graph von f geht durch den Ursprung.
2. ☐	Das Produkt $x \cdot f(x)$ ist für alle x gleich.
3. ☐	Die zweite Ableitung f'' von f ist positiv; $f''(x) > 0$ für alle x.
4. ☐	Der Graph von f ist eine Hyperbel.
5. ☒	$f(x+1) - f(x)$ ist unabhängig von x, also, für alle x gleich.

Basiswissen: Direkte Proportionalität sind Funktionen $f(x) = kx$, also Graph geht durch den Ursprung, ist eine Gerade, $f(x)/x = k$ ist für alle x gleich und die erste Ableitung ist konstant (k), somit ist die zweite Ableitung Null, und auch gilt $f(x+1) - f(x) = k(x+1) - kx = k$ ist unabhängig von x.

Aufgabe 7. (2P) **Differenzierregeln**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + \sin(\pi x)$.

Aufgabenstellung: Kreuzen Sie die richtigen 2 Aussagen an!

(1) ☐	$f(0) = \pi$
(2) ☐	$f'(0) = -\pi$
(3) ☐	$f'(\pi) = 6\pi$
(4) ☒	$f'(1) = 6 - \pi$
(5) ☒	$f''(0) = 6$

$f'(x) = 6x + \pi\cos(\pi)$ *und* $f''(x) = 6 - \pi^2 \sin(\pi x)$. *Einsetzen ergibt die Lösung.*

Aufgabe 8. (2P) **Lineare Funktionsgleichung**.

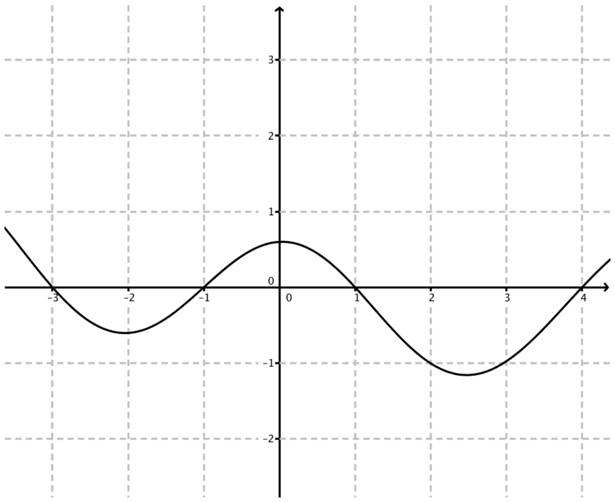
Die Funktion $f(x) = e^x$ geht durch den Punkt $(1|e)$. Der Graph der linearen Funktion $h(x) = kx + d$ berührt den Graphen von f im Punkt $(1|e)$ und daher ist der Graph von h eine Tangente von f im Punkt $(1|e)$.

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Parameter k und d in der Funktionsgleichung von h.

Antwort: $k = e, \qquad d = 0$.

Ich möchte an dieser Stelle darauf hinweisen, dass k und d Zahlen sind, und somit keine x-Abhängigkeit haben! Die Antwort erfolgt direkt, wenn man weiß, dass $f'(x) = e^x$ sodass $f'(1) = e$.

Aufgabe 9. (2P) **Funktionen und ihre Ableitungen**.



Betrachten Sie den dargestellten Graphen der Funktion f.
Aufgabenstellung: Skizzieren Sie im unterstehenden Diagramm den Graphen der Ableitung von f' ein! Sie sollten dabei eher auf qualitative Merkmale als quantitative Merkmale achten!
Kriterien waren: (a) Dort wo die Tangente Steigung Null hat, muss auch eine Nullstelle von f' ersichtlich sein. Diese waren bei $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2,5$. (b) Dort wo die Steigung positiv ist, muss f' auch eindeutig positiv sein.

Aufgabe 10. (2P) **Maximum und Minimum**.

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ hat erste Ableitung f' und zweite Ableitung f'' gegeben durch

$$f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}\,.$$

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie das Extremum der Funktion f und ob es sich hierbei um ein Maximum oder ein Minimum handelt!

Antwort: Das Extremum befindet sich an der Stelle $x = 0$ und es betrifft ein ~~Maximum~~ / <u>Minimum</u>. (Durchstreichen was nicht zutrifft.)

$f'(x) = 0$, dann muss der Zähler verschwinden, und der Nenner nicht, aber der Nenner ist niemals Null, also $f'(x) = 0$ genau dann wenn $x = 0$. Da $f''(0) = 2$ betrifft es ein Minimum.

Aufgabe 11. (2P) **Funktionsgleichung bestimmen**.

In der Tabelle sind einige Werte der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ $(c, a \in \mathbb{R}^+)$ angegeben.
Aufgabenstellung: Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser Funktion an!

Antwort: Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot 4^x$.

x	$f(x)$
-1	$0,5$
0	2
1	8

Aufgabe 12. (2P) **Ableitungen und Funktionen**.

Gegeben sind 5 reelle Funktionen.

Aufgabenstellung: Ordnen Sie jeder Funktion die richtige erste Ableitung zu:

$f(x) = \sin(3x)$	D
$f(x) = 2\cos(3x)$	A
$f(x) = -\sin(3x)$	B
$f(x) = 2\sin(3x)$	E
$f(x) = -2\cos(3x)$	C

A	$f'(x) = -6\sin(3x)$
B	$f'(x) = -3\cos(3x)$
C	$f'(x) = 6\sin(3x)$
D	$f'(x) = 3\cos(3x)$
E	$f'(x) = 6\cos(3x)$
F	$f'(x) = -6\cos(3x)$

VERTIEFUNGSTEIL

Aufgabe 1. *Erlös.*

Der Erlös E ist das Produkt aus Verkaufspreis p und der Anzahl n der verkauften Produkte, sodass $E = np$. Die Anzahl der verkauften Produkte ist nicht vom Preis unabhängig, denn um so teurer das Produkt, desto weniger wird man verkaufen können. Nehmen wir an, dass für ein bestimmtes Produkt gilt, dass

$$n(p) = \frac{150.000}{1 + 0,02 \cdot p}$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $n(p)$ für $p \in \mathbb{R}^+$ monoton fallend ist.

(b) (2 Punkte) Finden Sie den Preis p_{max} für den der Erlös maximal ist.

(a) **Methode 1**. Der Nenner ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung, also monoton steigend. Wenn der Nenner aber monoton steigend ist, der Zähler aber konstant ist, ist der Bruchterm also monoton fallend.

Methode 2. Sei $a > b > 0$, dann $1 + 0,02a > 1 + 0,02b > 0$ und daher $\frac{1}{1+0,02a} < \frac{1}{1+0,02b}$. Also $n(a) < n(b)$ wenn $a > b$. Daher ist n monoton fallend.

Methode 3. Für positive p ist der Nenner niemals Null. Somit wird es reichen, die erste Ableitung zu betrachten: $n'(p) = -\frac{150.000 \cdot 0,02}{(1+0,02p)^2} < 0$, weil $150.000 \cdot 0,02 = 3000$ positiv und der Nenner auch positiv ist. Das Minuszeichen macht also $n'(p) < 0$ für (auf jeden Fall) alle positive p.

(b) Diese Aufgabe erfordert das Differenzieren von $p \cdot n(p)$ und davon die Ableitung Null zu setzen. Achtung: Diese Gleichung wird dann keine Lösung haben außer $p = \infty$. Der Grund ist einfach: Ich habe die Aufgabe im letzten Moment für euch leichter machen wollen (die ursprüngliche Funktion war quadratisch im Nenner), was nett ist, aber dabei habe ich übersehen, dass die vereinfachte Funktion keine wirkliche Extremstelle hat: also man hat hier alle Punkte bekommen, wenn man nur richtig differenziert hat.

Methode 1: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} pn(p) = n(p) + pn'(p)$ und das muss Null sein, also (nach Kürzen von 150.000) ergibt sich dann $\frac{1}{1+0{,}02p} = \frac{0{,}02p}{(1+0{,}02p)^2}$ und somit $1 + 0,02p = 0,02p$ und also $1 = 0$ es gibt also keine Lösung: mit dem höchstmöglichen Preis hat man den meisten Erlös.

Methode 2: $E(p) = \frac{150.000p}{1+0{,}02p}$ und wir können somit auch die Funktion $f(p) = \frac{p}{1+0{,}02p}$ maximalisieren: $f'(p) = \frac{(1+0{,}02p)-p\cdot 0{,}02}{(1+0{,}02)^2} = \frac{1}{(1+0{,}02p)^2}$, was nur stimmt im Grenzfall $p \to \infty$.

Aufgabe 2. *Wasserrad.*

In einem Teich befindet sich ein Rad, das sich entgegen dem Uhrzeigersinn dreht und zum Teil in Wasser eintaucht. Das Rad hat einen Durchmesser von 4 Meter und sein Drehpunkt D befindet sich 1 Meter über der Wasseroberfläche. Ein Punkt P auf dem Rand des Rades befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Position P_0, also auf derselben Höhe wie der Drehpunkt. Der Punkt P führt eine volle Umdrehung in 40 Sekunden aus. Die Höhe über dem Wasserspiegel $h(t)$ des Punktes P lässt sich durch eine Formel

$$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + c$$

beschreiben. Die Höhe $h = 0$ korrespondiert mit der Wasseroberfläche.

(a) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie den Parameter a in der Formel für $h(t)$.

$a = 2$, halber Durchmesser

(b) (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie die Parameter b und c in der Formel für $h(t)$.

Periode ist $\frac{2\pi}{b} = 40$ also $b = \frac{\pi}{20}$. c ist die mittlere Höhe, und diese ist 1, also $c = 1$.

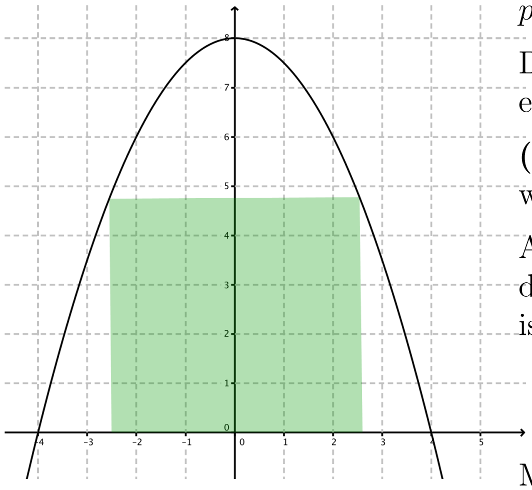
(c) (3P) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der die Höhe des Punktes P nach 5 Sekunden zunimmt.

Aus $h(t) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{20}t) + 1$ bekommt man $h'(5) = \frac{\pi}{10}\cos(\frac{\pi}{20} \cdot 5) \approx 0,22\ m/s$.

(d) (3P) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit, mit der die Höhe abnimmt, wenn der Punkt P ins Wasser eintaucht.

Ins Wasser tauchen heißt $h(t) = 0$. Also (nach Manipulation) $\sin(\frac{\pi}{20}t) = -\frac{1}{2}$ und $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$, wenn $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ oder $\alpha = \frac{7\pi}{6}$. Die erste Möglichkeit korrespondiert mit dem aus dem Wasser herauskommen, die zweite Möglichkeit mit dem ins Wasser eintauchen. Somit finden wir $t = \frac{20}{\pi} \cdot \frac{7\pi}{6} \approx 23$ Sekunden. Das setzen wir wieder in $h'(t)$ ein.

Aufgabe 3. *Großes Rechteck unter Parabel.*



Betrachten Sie die Parabel

$p: \quad y = 8 - \frac{1}{2}x^2.$

Dem Teil der Parabel oberhalb der x-Achse soll ein Rechteck wie in der Abbildung eingeschrieben werden.

(a) (3 Punkte) Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen, damit sein Flächeninhalt maximal ist?

Aus einer Skizze entnimmt man: eine Seite hat Länge $2x$, die andere Seite hat dann Länge $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$. Die Fläche ist somit

$$A(x) = 2x(8 - \frac{1}{2}x^2) = 16x - x^2 \,.$$

Man braucht also $A'(x) =$ lösen, also $16 - 3x^2 = 0$, sodass $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Die Seitenlängen sind also $\frac{8}{\sqrt{3}}cm$ und $\frac{16}{3}cm$.

(b) (2 Punkte) Wie lang sind die Seiten des Rechtecks zu wählen, damit sein Umfang maximal ist?

Dieselbe Idee $U(x) = 4x + 2(8 - \frac{1}{2}x^2)$ und $U'(x) = 4 - 2x$ also $x = 2$, und somit sind die Seitenlängen $4cm$ und $6cm$.

Aufgabe 4. *Umkehrfunktionen.* (2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung: Begründen Sie, dass die Funktion f keine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Idee: Wenn man den Graphen sieht, wird man entdecken, dass es für einen y-Wert mehrere x-Werte gibt. Wie man den Graphen schnell sieht:

(1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ (2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (4) $f(-x) = -f(x)$

Aufgabe 5. *Bevölkerungswachstum.*

Das Bevölkerungswachstum eines Landes setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Eine Komponente ist die biologische; die Bevölkerung wächst durch Geburten und nimmt ab durch Sterbefälle - meistens ist die Geburtenrate höher als die Sterberate. Die zweite Komponente betrifft die Migration; Menschen können auswandern (emigrieren) oder eben einwandern (immigrieren). In dieser Aufgabe betrachten wir nur die biologische Komponente.

Nehmen wir an, das Land Trumpistan ist ein Inselstaat und kennt keine Migration, weder Immigration noch Emigration. Dann dürfen wir annehmen, dass die Bevölkerung in gleichen Zeitabschnitten um gleich große Prozentsätze zunimmt. Die Funktion $B(t)$ beschreibe die Einwohneranzahl ab dem Jahr 2016, welches mit $t = 0$ korrespondiert.

(a) (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die richtig(st)e Möglichkeit an!

1. ☐	Die Zunahme ΔB ist in kleinen, gleich großen Zeitintervallen gleich groß.
2. ☒	Die relative Zunahme $\frac{\Delta B}{B}$ ist in kleinen, gleich großen Zeitintervallen gleich groß.
3. ☐	Die Funktion B ist annähernd periodisch.

(b) (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die Formel an, die $B(t)$ am besten beschreibt!

1. ☒	$B(t) = c \cdot a^t$, mit $c, a \in \mathbb{R}^+$.
2. ☐	$B(t) = kt + d$, mit $k, d \in \mathbb{R}^+$.
3. ☐	$B(t) = p \cdot t^q$, mit p, q reelle Zahlen größer als 1.

(c) (3 Punkte) Gehen wir davon aus, dass im Jahr 2016 das Land Trumpistan 7.500.000 Einwohner hat. Des Weiteren sei gegeben, dass die Einwohneranzahl jedes Jahr um 2,5% zunimmt. Bestimmen Sie, in welchem Jahr das Land 8.000.000 Einwohner hat.

Ansatz ist $B(t) = 7.500.000 \cdot 1,025^t$. Also zu lösen ist $B(t) = 8.000.000$, und nach Division durch 8.000.000 ergibt das also

$$\frac{16}{15} = 1,025^t \Longrightarrow t = \frac{\ln(16/15)}{\ln(1,025)} \approx 2,6$$

also nach Daumen-mal-Pi 3 Jahren.