Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 13 (von 30.11 bis 04.12)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 03.12:
Lerne bzw. erledige die Aufgaben 3.71, 3.72, 3.73, 3.75, 3.77, 3.81.
Schau dir die Korrektur zur sSWH an!
Bis Freitag 04.12:
Lerne und / oder erledige die Aufgaben 3.84, 3.86, 3.88, 3.90, 3.92.
Bis Donnerstag 10.12:
Lerne/Erledige die Aufgaben 3.97, 3.100(c), 3.110, 3.111, 3.112, 3.119, 3.122. Die Extremwertaufgaben sind in schöner Form **abzugeben**!

Kernbegriffe dieser Woche:

Differenzieren, Zunahme, Zunahmerate, Sekante, Tangente, Steigung, Differenzenquotient, Neigungswinkel, mehrfache Ableitungen, Terrassenpunkt, Wendepunkt

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Dienstag (1. Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) Fragen zu sSWH?, (iii) Polynome Grad 3: 3.71, 3.72, 3.73, (iv) Grad 4: 3.75, 3.77, 3.81

(b) Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Textaufgabe 3.84, (iii) Bedingungen: 3.86, 3.88, 3.90 (Lesen), 3.92

(c) Freitag (3. Std): HÜ-Bespr. und evt. sSWH, (ii) 3.97, 3.100(c) (iii) Extremwertaufgaben: 3.110, 3.111, 3.112, 3.119, 3.122

Mehrfache Ableitung: zweite Ableitung f'' ist die Ableitung der Ableitung. Wenn f ein Polynom von Grad n ist, dann ist die k. Ableitung $f^{(k)}$ ein Polynom von Grad $n-k$, also $f^{(n+1)} = 0$.
Terrassenpunkt: Erste Ableitung ist Null, aber es ist kein Extremum; das Monotonieverhalten ändert sich nicht. Standardbeispiel: $x = 0$ bei $f(x) = x^3$.
Wendepunkt: Eine Stelle $x = a$, sodass $f''(a) = 0$ und f' muss das Vorzeichen wechseln. Standardbeispiel: $x = 0$ bei $f(x) = x^3 - x$

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(4) „Berechne" für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle" eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(10) Formuliere die Regel von Horner!

(11) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(13) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben" bei Woche 4.

(15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

(20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.

(21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

(22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.

(23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.

(24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.

(25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.

(26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.

(27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.

(28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a.b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k, die nicht Null sein darf.)

(31) Finde ein kubisches Polynom p, sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

SWH zu Polynomfunktionen NAME: ____________________________

(A) Untersuche die Funktion $f(x) = 0,2x^3+2x^2-3x-1$ auf Extremstellen, Monotonieverhalten. Skizziere den Graphen so, dass die wichtigen Eigenschaften eindeutig ersichtlich sind.
(B) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen. Skizziere den Graphen!

(A) $f'(x) = 0,6x^2+4x-3$. Mit Lösungsformel findest du die Lösungen von $f'(x) = 0$; $x \approx -7,4$ und $x \approx 0,7$. Da der führende Koeffizient $0,2$ positiv ist: Steigend in den Intervallen $(-\infty; -7,4]$ und $[0,7, \infty)$. Dazwischen fallend. Eine Aufgabe für dich ist es, mit GeoGebra oder Google den Graphen selbst zu plotten.
(B) Die Funktion ist symmetrisch. Nullstellen: entweder mit $t = x^2$ die Gleichung $t^2-2t+1 = 0$ lösen ($t = 1$ einzige Lösung) oder sehen, dass $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Somit ist f immer positiv, und hat Nullstellen (Berührungspunkte, die also automatisch Tiefpunkte sind) bei $x = \pm 1$.
Extremstellen: $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ und somit gibt es Extremstellen bei $x = \pm 1$ (war zu erwarten) und bei $x = 0$ (ist Hochpunkt). Daher: f ist monoton fallend auf $(-\infty; -1)$ und $(0; 1)$ und steigend auf $(-1; 0)$ und $(1; \infty)$.
Wendestellen: $f''(x) = 12x^2 - 4$ hat Nullstellen bei $x = \pm\sqrt{1/3}$.
Graph bitte selbst mit Google oder GeoGebra kontrollieren.

SWH zu Polynomfunktionen NAME: ________________________

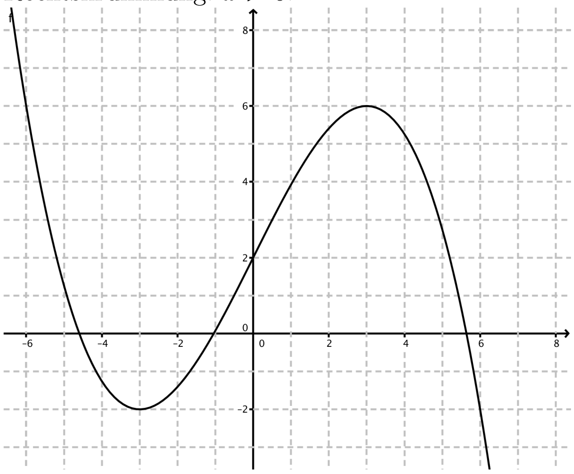
(A) Untersuche die Funktion $f(x) = -0,2x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ auf Extremstellen, Monotonieverhalten. Skizziere den Graphen so, dass die wichtigen Eigenschaften eindeutig ersichtlich sind.
(B) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen. Skizziere den Graphen

---

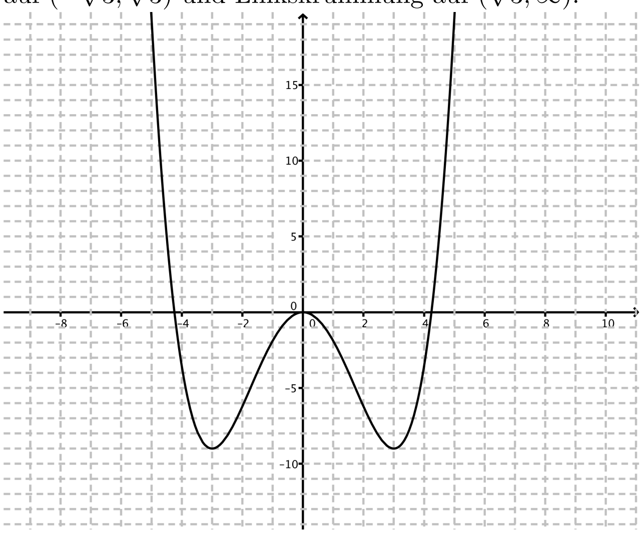
(A) $f'(x) = -0,6x^2 + 4x + 3$. Nullstellen mit Formel: $x \approx -0,7$ und $x \approx 7,4$. Da der führende Koeffizient $-0,2$ negativ ist: Fallend in den Intervallen $(-\infty; -7,4]$ und $[0,7,\infty)$. Dazwischen steigend. Eine Aufgabe für dich ist es, mit GeoGebra oder Google den Graphen selbst zu plotten.
(B) Die Funktion ist symmetrisch. Bemerke, dass $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, daher ist f immer positiv, und sogar ≥ 4. Somit gibt es keine Nullstellen. Mehr Arbeit aber auch ok: nimm $x^2 = t$ und schreibe $t^2 + 4t + 4 = 0$, wovon die Diskriminante $D = 16 - 16 = 0$, somit gibt es eine Lösung für t, nml. $t = -2$, aber dann gibt es für x keine Lösung, denn $x^2 = -2$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.
Extremstellen: $f'(x) = 4x^3 + 8x = 4x(x^2 + 2)$ und da $x^2 + 2$ immer niemals Null ist, gibt es nur bei $x = 0$ eine Extremstelle. Auf $(-\infty; 0)$ ist f fallend, auf $(0; \infty)$ ist f steigend.
Wendestellen: $f''(x) = 12x^2 + 8$ und das ist immer ≥ 8, also keine Wendestellen. Graphen bitte mit GeoGebra oder Google kontrollieren.

KORREKTUR der Aufgaben von Woche 12

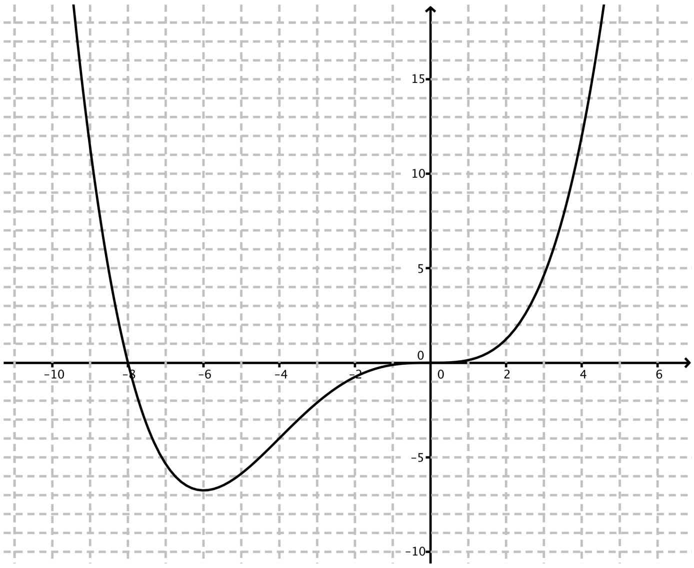
3.38(c). $f(x) = -\frac{2}{27}x^3 + 2x + 2$. $f'(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 2$. $f''(x) = -\frac{2}{3}x$. Daher Wendepunkt $(0|2)$. Extremum bei $x = \pm 3$; Tiefpunkt bei $(-3|-2)$; Hochpunkt bei $(3|6)$. Also, fallend im Intervall $(-\infty; -3)$, steigend im Intervall $(-3; 3)$ und fallend im Intervall $(3; \infty)$. Linkskrümmung: $x < 0$, Rechtskrümmung: $x > 0$.



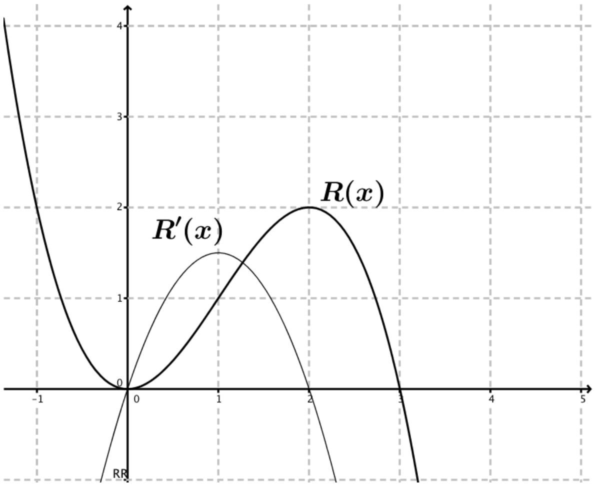
3.40(c). $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2$. Wegen geraden Potenzen $f(-x) = f(x)$, also symmetrisch. Nullstellen $f(x) =$ bedeutet $\frac{1}{9}x^4 - 2x^2 = 0$. Nenne $t = x^2$, dann $\frac{1}{9}t^2 - 2t = 0$. Lösungen $t = 0$ und $t = 18$. Daher $x = 0$ (zweimal) und $x = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$. Extrema: $f'(x) = 0$, also $\frac{4}{9}x^3 - 4x = 0$. Lösungen $x = 0$, oder $x = \pm 3$. Tiefpunkte $(-3|-9)$ und $(3|-9)$ (Symmetrie!!), Hochpunkt $(0|0)$, also der Ursprung ist ein Hochpunkt und ein Nullpunkt. Fallend auf dem Intervall $(-\infty; -3)$, steigend auf $(-3; 0)$, fallend auf $(0; 3)$ steigend auf $(3; \infty)$. Wendestellen: $f''(x) = 0$, also $\frac{4}{3}x^2 - 4 = 0$, also $x = \pm\sqrt{3}$. Linkskrümmung auf $(-\infty; -\sqrt{3})$, Rechtskrümmung auf $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ und Linkskrümmung auf $(\sqrt{3}; \infty)$.



3.40(f). $f(x) = \frac{x^4 + 8x^3}{64}$. Nullstellen bei $x = 0$ und $x = -8$. Nicht symmetrisch, wegen gemischter Potenzen. Extremen: $f'(x) = \frac{x^3 + 6x^2}{16}$ also Extremen bei $x = 0$ (doppelt), und bei $x = -6$; $(0|0)$ und $(-6|-\frac{27}{4})$. Wendestellen $f''(x) = 3 \cdot \frac{x^2 + 4x}{16}$, also bei $x = 0$ und bei $x = -4$; $(0|0)$ und $(-4|-4)$.



3.42. Ich nehme es allgemein für $R(x) = ax^2(b - x)$.
(1) Nullstellen bei $x = 0$ (doppelt) und bei $x = b$. Lokale Extremstellen: $f(x) = abx^2 - ax^3$ also $R'(x) = 2abx - 3ax^2 = ax(2b - 3x)$. Also Minimum bei $x = 0$ und Maximum bei $x = \frac{2b}{3}$.
(2) Nullstellen von $R'(x)$ haben wir schon! $R''(x) = 2ab - 6ax$ ist Null wenn $x = \frac{b}{3}$.
(3) Die Reaktion ist am stärksten, wenn R maximal ist. Das ist also bei $x = 2b/3$.
(4) Die Empfindlichkeit ist am stärksten, wenn R' maximal ist. Daher bei $x = \frac{b}{3}$..



3.43. In der Klasse.

3.44. $V(t) = -t^3 + 20t^2$. $t \in [0; 12]$.
(1) Sauerstoffabgabe(geschwindigkeit) fängt langsam an, steigt dann rasant an, bremst sich dann ab und nach etwa 12 Stunden ist die Abgabegeschwindigkeit wieder Null.
(2) Gefragt ist hier, wann $V'(t)$ maximal ist, also dann ist $V''(t) = 0$. Daher $-6t + 40 = 0$, daher bei $t = 20/3 = 6^h 40^m$.
(3) Einfach $t = 6\frac{2}{3}$ in die Formel einsetzen. Ablesen ergibt etwa 600 Liter. Rechnen ergibt 593 Liter.
(4) Gefragt ist $V'(6\frac{2}{3}) = -3(6\frac{2}{3})^2 + 40 \cdot 6\frac{2}{3} = 133\frac{1}{3}$.

KORREKTUR der Aufgaben von Woche 12

3.46. Größtenteils in der Klasse. Wegen des letzten Punktes: Wenn f symmetrisch ist, dann gibt es nur gerade Potenzen, zB $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$. Daher hat f' nur ungerade Potenzen und ist somit Punktsymmetrisch um den Ursprung, daher muss $f'(0) = 0$. Ähnlich $f'''(0) = 0$.

3.48. Bei der Wendestelle gilt $f''(x) = 0$, dann ist a egal, weil wir dann durch a dividieren können. Somit dürfen wir $a = 1$ annehmen. Dann $f(x) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Zweimal differenzieren ergibt dann $f''(x) = 6x - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ und daher ist $f''(x) = 0$ genau dann wenn $x = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{3}$, was zu beweisen war.

3.49. (1) $f''(x) = 6ax + 2b$, das ist eine lineare Funktion und da $a \neq 0$ ist diese zu lösen mit $x = -\frac{b}{3a}$. Das ist also genau ein Wendepunkt. (2) Damit der Wendepunkt ein Sattelpunkt ist muss die Steigung immer gleich sein (positiv oder negativ), daher muss die quadratische Gleichung $f'(x) = 0$ genau eine Lösung haben. Dies entspricht eben genau einer Parabel (von f'), die als einzige Nullstelle einen Berührungspunkt mit der x-Achse hat. Wir finden $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dies darf also nur eine Lösung haben: $D = (2b)^2 - 4(3a)c = 0$, also $4b^2 - 12ac = 0$ also $b^2 - 3ac = 0$. In dem Fall ist dann die einzige Nullstelle bei $x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$. Das erledigt den Beweis.

Achtung! Wenn eine Parabel nur eine Nullstelle hat, ist dieser genau auch ein Extremum!

3.55. (1) Sportler B: bei ihm liegt das Laktatminimum bei 12 km/h. (2) Für A: Mader: 13 km/h. Simon: Tangente muss Steigung 1 haben, auch etwa bei 13 km/h. Bei B: Mader fast 15 km/h. Simon: 14 km/h. (3) $L'(v) = 0,075v^2 - 1,18v + 2,89 = 0$ also $75v^2 - 1180v + 2890 = 0$ also $15v^2 - 236v + 578 = 0$ somit $v = \ldots$ Formel mit TR. Für Sportler B geht es genau so.

KORREKTUR der Aufgaben von Woche 12

3.58. $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tiefpunkt bei $f'(x) = 0$ also $2ax + b = 0$, $2a \cdot 2 + b = 0$ also $4a + b = 0$, oder $b = -4a$. Somit $f(x) = ax^2 - 4ax + c$. Die Steigung der Tangente bei $x = 0$ ist b, daher $4a = 3$, also $a = \frac{3}{4}$. Somit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + c$. Da aber $f(2) = -2$ gilt $\frac{3}{4}2^2 - 3 \cdot 2 + c = -2$ also $3 - 6 + c = -2$. Daher $c = 1$ und $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1$.

3.59. Wie vorher $f(x) = ax^2 + bx + c$. Hochpunkt, somit $a < 0$. Extremum wenn $2ax + b = 0$ also $2a + b = 0$ also $b = -2a$. Daher $f(x) = ax^2 - 2ax + c$. Steigung bei $x = 4$ findet man indem man bei $2ax + b = 2ax - 2a = 2a(x - 1)$ 4 einsetzt also muss gelten $6a = -6$ und somit $a = -1$. Daher $f(x) = -x^2 + 2x + c$. Wenn $x = 1$ gilt $f = 2$ also $-1^2 + 2 \cdot 1 + c = 2$ also $c = 1$. Somit $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

3.61. Die Steigung der Tangente ist -1. Daher $f'(-1) = -1$. Somit $2ax + b = -1$ bei $x = -1$ somit $-2a + b = -1$. Wir wissen auch $f(-1) = -3$ also $a - b + 1 = -3$. Das sind zwei Gleichungen in zwei Variablen. Aus der letzten bekommen wir $a = b - 4$, daher $-2(b - 4) + b = -1$ und also $-b + 8 = -1$, und wir finden $b = 9$ und $a = 5$. Somit $f(x) = 5x^2 + 9x + 1$. Kontrolle $f'(x) = 10x + 9$ also $f'(-1) = -10 + 9 = -1$ und $f(-1) = 5 - 9 + 1 = -3$.

3.66. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, denn $f(0) = 0$ und somit kann kein konstanter Term (ohne x) dabei sein. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ also $f'(0) = c$. Die Steigung bei 0 ist -1, denn $\tan(135 Grad) = -1$. Auch $f'(1) = 3a + 2b - 1 = 14$ also $3a + 2b = 15$. Wir wissen aber auch $f(1) = 5$ also $a + b - 1 = 5$ also $a + b = 6$. Daher $a = b = 3$.