Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 14 (von 07.12 bis 11.12)

Hausaufgaben [1]

Bis Dienstag 15.12:
(A) Lerne/Erledige die Aufgaben 3.123, 3.124, 3.127, 3.134 und 3.136.
(B) Bezüglich Reparaturmöglichkeit - siehe unten.

Kernbegriffe dieser Woche:

Differenzieren, Zunahme, Zunahmerate, Sekante, Tangente, Steigung, Differenzenquotient, Neigungswinkel, mehrfache Ableitungen, Terrassenpunkt, Wendepunkt

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Erklären einer Reparaturmöglichkeit, (iii) Extremwertaufgaben: 3.123, 3.124, 3.127
- **(b)** Freitag (3. Std): Ihr seid auf Ausflug! Ihr bekommt aber einen Auftrag mit - die Aufgaben 3.134 und 3.136! Ich empfehle manchen auch, die Reparaturmöglichkeit schon auszuarbeiten! In der kommenden Woche möchte ich eine Prüfungssituation halten, wo sich die meisten Fragen auf Grundkompetenzen und dem Fragenkatalog stẗzen.

Mehrfache Ableitung: zweite Ableitung f'' ist die Ableitung der Ableitung. Wenn f ein Polynom von Grad n ist, dann ist die k. Ableitung $f^{(k)}$ ein Polynom von Grad $n-k$, also $f^{(n+1)} = 0$.
Terrassenpunkt: Erste Ableitung ist Null, aber es ist kein Extremum; das Monotonieverhalten ändert sich nicht. Standardbeispiel: $x = 0$ bei $f(x) = x^3$.
Wendepunkt: Eine Stelle $x = a$, sodass $f''(a) = 0$ und f' muss das Vorzeichen wechseln. Standardbeispiel: $x = 0$ bei $f(x) = x^3 - x$

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Reparaturmöglichkeit Analyse von Polynomen

Liebe SchülerInnen der 7A!

Das gut Analysieren von Polynomfunktionen von Grad 2, 3, und 4 scheint mir eine wichtige Fähigkeit zu sein, und sogar eine gute Übung! In Gegensatz zu den Extremwertaufgaben kann man hier einiges einfach auswendig lernen und eintrainieren. Dies bietet also auch eine sichere Möglichkeit, eine Komponente der Note gut zu fixieren. Sind bei dir beide Stundenwiederholungen zu diesem Thema nicht im von dir erwünschten Regime, so kannst du mir doch noch zeigen, dass du gut Polynomfunktionen analysieren kannst. Was musst/kannst du tun?

Erstens, du musst mehrere Polynome auf Wendestellen, Extremstellen, Monotonieverhalten und Symmetrie untersuchen können. Bei Grad 2 musst du immer die Nullstellen finden können. Du musst dann den Graphen qualitativ skizzieren können. Du kannst das zum Beispiel mit folgenden Funktionen tun:
(i) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 4x^2 + 5x - 1$
(ii) $g(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{8}$
(iii) $h(x) = x^3 - 7x$
Ich empfehle aber, auch selbst ein(ig)e Funktion(en) vorzuschlagen!

Zweitens musst du einige Funktionen mithilfe von Bedingungen finden können. Hier schlage ich die Aufgaben 3.75 bis 3.84 aus dem Buch vor.

Wie geht es dann weiter, wenn du das kannst? Entweder machst du eine schöne Show (max. 10-15 Minuten) vor der Klasse, oder wir machen uns einen Termin aus. Natürlich kann ich nicht alle Personen vor der Klasse eine Show machen lassen, aber eine oder zwei werden sich schon ausgehen. Aber, sei gefasst, ich werde natürlich immer etwas nachfragen: wie machst du das, wie ändert sich die Aufgabe, wenn ich eine zwei in eine drei ändere, oder ein Plus in ein Minus verändere? Du musst auch frei reden können, und du musst die Antworten geben; rede also ohne Zettel in der Hand!

Geht es auch schriftlich? Nein, diesmal nicht. Ich werde bald eine Prüfungssituation machen, und ich bin natürlich keine Test- und Prüfungsfabrik! (Wäre schon toll!)

Ich weiß, die Schule ist nicht immer Spaß, und oft Stress ... been there, done that. Man überlebt die Schule! Ich bitte so viele Hilfestellen wie möglich an, sodass man mit Fleiß und Einsatz ein so gut wie mögliches Ergebnis hat. Schule impliziert viel, und sogar sehr viel Arbeit. Haltet durch! Jetzt geht es allmählich doch in Richtung Matura und wenn wir als Team gut zusammen arbeiten (jaja, wieder das Wort „arbeiten“), wird uns auch diese Matura nicht überraschen und beängstigen können!

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(4) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(10) Formuliere die Regel von Horner!

(11) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(13) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

(20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.

(21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

(22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.

(23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.

(24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.

(25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.

(26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.

(27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.

(28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a.b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k, die nicht Null sein darf.)

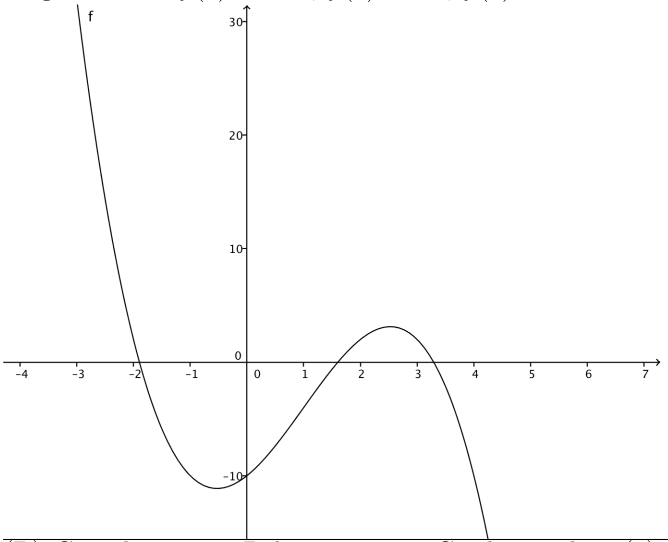
(31) Finde ein kubisches Polynom p, sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

SWH zu Polynomfunktionen NAME: ____________________

(A) Untersuche die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 10$ auf Extremstellen, Wendestellen und Monotonieverhalten. Skizziere den Graphen so, dass die wichtigsten Merkmale ersichtlich sind (Nullstellen müssen nicht genau eingezeichnet sein).

Wendestellen: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 4$. Dann $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = -1 \pm \frac{1}{6}\sqrt{84}$, also etwa bei $x = 2,5$ und $x = -0,5$.
Wendestellen: $f''(x) = -6x + 6 = 0$ genau dann wenn $x = 1$.
Monotonieverhalten: im $[-0,5; 2,5]$ monoton steigend, in $(-\infty; -0,5]$ und $[2,5; \infty)$ monoton fallend.
Wegen Grafik: $f(0) = -10$, $f(1) = -4$, $f(2) = 2$.



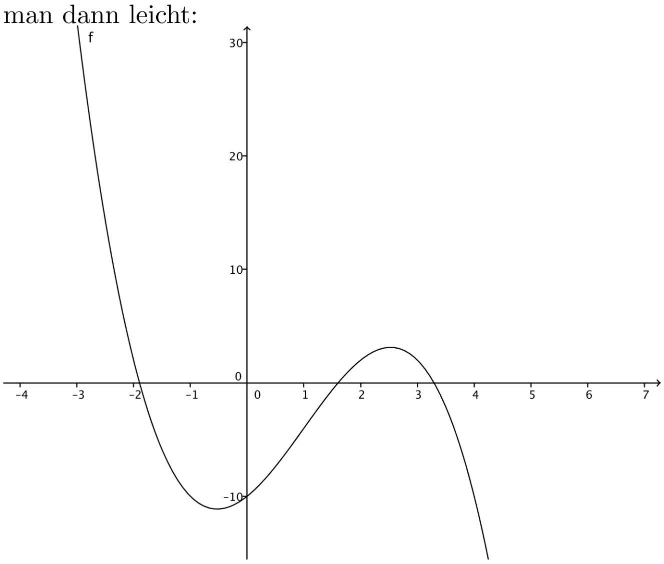
(B) Gesucht ist ein Polynom p von Grad 4, sodass (1) $p(x) = p(-x)$, (2) $p(0) = 4$ und (3) $p'(2) = p'(-2) = 0$ und $p(1) = 1$. Finde p.

Wegen (1) $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Wegen (2): $c = 4$.
Somit $p(x) = ax^4 + bx^2 + 4$ und daher $p'(x) = 4ax^3 + 2bx$, also $p'(2) = 32a + 4b$ und das muss Null sein. Somit $b = -8a$.
Somit $p(x) = ax^4 - 8ax^2 + 4$ und wegen $p(1) = 1$: $a - 8a + 4 = 1$ also $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{8}{3}$.
Daher $p(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 4 = \frac{x^4-8x^2+12}{3} = \frac{(x^2-2)(x^2-6)}{3}$.

SWH zu Polynomfunktionen NAME: ________________________

(A) Untersuche die Funktion $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 10$ auf Extremstellen, Wendestellen und Monotonieverhalten. Skizziere den Graphen so, dass die wichtigsten Merkmale ersichtlich sind (Nullstellen müssen nicht genau eingezeichnet sein).

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4$. Von der Gleichung $3x^2 + 6x + 4 = 0$ ist die Disktriminante negativ. Also keine Lösungen, also keine Extremstellen. $f'(0) = 4$ ist positiv, also ist $f'(x)$ immer positiv. Daher ist f monoton steigend überall.
Da $f''(x) = 6x + 6$ gibt es eine Wendestelle bei $x = -1$.
Man berechnet leicht: $f(-1) = -1 + 3 - 4 - 10 = -12$ und $f(1) = 1 + 3 + 4 - 10 = -2$, und $f(2) = 8 + 12 + 8 - 10 = 18$. Also eine Nullstelle zwischen $x = 1$ und $x = 2$. Somit skizziert man dann leicht:



(B) Gesucht ist ein Polynom p von Grad 4, sodass (1) $p(x) = p(-x)$, (2) $p(0) = 4$ und (3) $p'(3) = p'(-3) = 0$ und $p(1) = 2$. Finde p.
Wegen (1): $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Wegen (2): $c = 4$. Also $p(x) = ax^4 + bx^2 + 4$. Somit gilt $p'(x) = 4ax^3 + 2bx$.
Weil $p'(3) = 0$ bekommt man: $108a + 6b = 0$ also $b = -18a$. Daher $p(x) = ax^4 - 18ax^2 + 4$.
Weil $p(1) = 2$ bekommt man: $a - 18a + 4 = 2$ also $a = \frac{2}{17}$ und $b = -\frac{36}{17}$.
Somit $p(x) = \frac{2x^4 - 36x^2 + 68}{17}$.