

Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 20 (von 25.01 bis 29.01)

Hausaufgaben ¹

Donnerstag 28.01:

(A) **Lerne/Erledige** die Aufgaben 4.36(b), 4.37(a)(d), 4.38(a)(b)(c)(d), 4.39, 4.40 (alle).

(B) Bitte auch Folgendes selbständig üben:

http://www.mat.univie.ac.at/~westra/wenzgasse_2015_2016/klasse7A_M/GK_Zahlenmengen_Terme.pdf

welches ich für euch vor einiger Zeit zusammengestellt habe.² Bei Fragen oder Korrekturwünschen dich an mich wenden!

Bis Freitag 29.01:

(A) **Lerne und / oder erledige** die (Differenzier-)Aufgaben, die wir bis jetzt gemacht haben. Bitte: Die Ableitungsregeln musst du alle auswendig wissen, und auch richtig formulieren können. ZB: Wenn $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, dann $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Ohne den „Wenn“-Teil geht es nicht!

(B) Lerne auch die Ausarbeitung der SWH der vorigen Woche.

Bis Dienstag 09.02:

Lerne/Erledige die Aufgaben 4.44, 4.45, 4.46 (alle) und 4.48. Und nimm dir bitte in den Semesterferien vor, einige Grundkompetenzen zu wiederholen! Schau dir zB die Mengenaufgaben an! Auch die Aufgaben zu Mengen und Termen wäre eine gute Idee. Quadratische Gleichungen, Periodische Funktionen, Exponentialfunktionen, Potenzfunktionen, usw. Alles brauchen wir bald wieder! Also bitte, wiederhole dies!

Kernbegriffe dieser Woche:

Ableitungsregeln: Produktregel, Quotientenregeln, Ableitung von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- (a) Dienstag (1. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) die Aufgaben 4.36(b), 4.37(a)(d), 4.38(a)(b)(c)(d), 4.39, 4.40 (alle), (iii) Wiederholung einiger Aufgaben – Fragenrunde?
- (b) Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) einige Ableitungen wichtiger Funktionen und einige Regeln: alles zusammenfassen: mehrere Beispiele: $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1/x$.
- (c) Freitag (3. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. sSWH, (ii) Aufgaben 4.44, 4.45, 4.46 (alle) und 4.48

Produktregel: Falls $f(x) = u(x)v(x)$, dann $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Kehrwertregel: Falls $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, dann $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$.

¹Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

²In anderen Klassen wurde dies schon selbständig durchgenommen. Habt ihr das auch schon gemacht?

Quotientenregel: Falls $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, dann $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

erste Verknüpfungsregel: Falls $f(x) = h(kx)$ mit k eine Zahl, dann $f'(x) = kh'(kx)$.

zweite Verknüpfungsregel: Falls $f(x) = g(h(x))$, dann $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Wichtige Funktionen: Falls $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$, $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$, $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

Kurzes zu Mengen

$A \cup B$ ist die Vereinigung der Mengen A und B . Sie besteht aus den Elementen von A und B zusammen.

$A \cap B$ ist der Durchschnitt der Mengen A und B . Sie besteht aus den Elementen, die sowohl in A , wie in B liegen.

$A \setminus B$ ist A weniger B und sie besteht aus den Elementen von A , die nicht in B liegen.

Beschreibe $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$, falls

- (a) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$;
- (b) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$;
- (c) $A = [-1; 1]$, $B = \mathbb{Z}$;
- (d) $A = [-1; 1]$, $B = \mathbb{Q}$;
- (e) $A = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{R}$;
- (f) $A = [-1; 1]$, $B = (0; \infty)$;
- (g) $A = [-3; 1] \cup [2; 5]$, $B = [-3; 3]$.

$A \subset B$ bedeutet A ist eine Untermenge von B , somit ist jedes Element von A auch ein Element von B .

- (i) Beweise $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$, $A \subset A$.
- (ii) Beweise, dass aus $A \subset B$ folgt, dass $A \cap B = A$.
- (iii) Welche Inklusionsbeziehungen gibt es zwischen den Mengen, die oben bei (a) bis (g) benutzt wurden?

SWH-a Produktregel & Quotientenregel – Mitarbeitüberprüfung

Aufgabe 1: Formuliere die Produktregel und die Quotientenregel! Siehe Planungsblatt Seite 1,2.

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion auf $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ auf Monotonie, Nullstellen und Extremstellen. Graphen musst du nicht zeichnen!

Nullstelle bei $x = 2$. Nicht definiert bei $x = -3$. Ableitung $f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2} > 0$ also monoton steigend auf Intervallen, wo die Funktion definiert ist, keine Extremstellen.

Aufgabe 3: Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$. Das Ziel ist, das Maximum von h zu bestimmen. Dies machen wir mit verschiedenen Schritten:

(a) Zeige im Allgemeinen mithilfe der Quotientenregel, dass eine Funktion $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ eine Extremstelle hat, wenn $uv' = u'v$.

$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ und dies ist Null, wenn der Zähler verschwindet (und dabei der Nenner nicht), also wenn $u'v - uv' = 0$, also wenn $u'v = uv'$.

(b) Zeige, dass für die Funktion $v(x) = (1+x^2)^3$ gilt $v'(x) = 6x \cdot (1+x^2)^2$.

Direkt mittels Ausmultiplizieren $v(x) = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6$ (jaja, dieses Ausmultiplizieren kommt doch immer wieder zurück). Also $v'(x) = 6x + 12x^3 + 6x^5$. Andererseits gilt auch $6x(1+x^2)^2 = 6x(1+2x^2+x^4) = 6x + 12x^3 + 6x^5$, und diese Ausdrücke sind gleich.

Andere Methode: Kettenregel $v(x) = k(x)^3$ mit $k(x) = 1+x^2$, also $v'(x) = 3k(x)^2 \cdot k'(x) = 3(1+x^2)^2 \cdot 2x$, was auf dasselbe hinausläuft.

(c) Benutze $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $u(x) = x^2$ und $v(x) = (1+x^2)^3$ zusammen mit (a), (b) und der Tatsache, dass $1+x^2 > 0$, um das Maximum von h zu finden.

$u'(x)v(x) = 2x \cdot (1+x^2)^3$ und $u(x)v'(x) = x^2 \cdot 6x(1+x^2)^2$. Da $u'v = uv'$ zu lösen ist, zuerst $(1+x^2)^2$ kürzen und dann erscheint etwa $2x(1+x^2) = 6x^3$, also $2x = 4x^3$. Die Lösung $x = 0$ ist nicht interessant, also $x^2 = 1/2$ bekommen wir. Also $x = \pm\sqrt{1/2}$.

(d) Berechne den Funktionswert beim Maximum!

Benutze $x^2 = 1/2$ und dann einsetzen: $f_{max} = \frac{1/2}{(3/2)^3} = \frac{4}{27}$.

SWH-b Produktregel & Quotientenregel

Aufgabe 1: Formuliere die Produktregel und die Quotientenregel! Siehe Planungsblatt Seite 1,2.

Aufgabe 2: Untersuche die Funktion auf $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ auf Monotonie, Nullstellen und Extremstellen. Graphen musst du nicht zeichnen!

Nullstelle $x = -2$. Nicht definiert bei $x = 3$. $f'(x) = -\frac{5}{(x+3)^2} < 0$ also monoton fallend auf Intervallen wo f definiert ist. Keine Extremstellen.

Aufgabe 3: Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$. Das Ziel ist, das Maximum von h zu bestimmen. Dies machen wir mit verschiedenen Schritten:

Schritt 1: Betrachte die Funktion $h(x)$ nicht als Funktion in x , sondern als Funktion in x^2 . Das heißt, substituiere $x^2 = u$ und nenne diese neue Funktion $H(u)$.

(a) Schreibe $H(u) = \frac{A(u)}{B(u)}$ mit A und B Polynomfunktionen in u . Gib $A(u)$ und $B(u)$.

$A(u) = u$, $B(u) = (1+u)^3 = 1 + 3u + 3u^2 + u^3$. Dieses Ausmultiplizieren musst du immer wieder können!

(b) Zeige im Allgemeinen, dass $H'(u) = 0$ genau dann, wenn $A'B = AB'$.

Quotientenregel anwenden! $H' = \frac{A'B - B'A}{B^2}$ und dies ist Null genau dann, wenn der Zähler verschwindet (ohne dass der Nenner auch Null ist), also wenn $A'B = B'A$.

(c) Zeige, dass die Funktion H ein Maximum hat, wenn die Bedingung $2u^3 + 3u^2 - 1 = 0$ erfüllt ist.

$A' = 1$, $B' = 3 + 6u + 3u^2$. Somit $A'B = 1B = B = 1 + 3u + 3u^2 + u^3$ und $AB' = 3u + 6u^2 + 3u^3$. Letzte zwei gleichsetzen: $2u^3 + 3u^2 - 1 = 0$.

(d) Die Gleichung $2u^3 + 3u^2 - 1 = 0$ hat eine Lösung $u = -1$. Finde die anderen Lösungen! Für welche der beiden anderen ist $u = x^2$ nach x lösbar?

Das Polynom $P = 2u^3 + 3u^2 - 1$ also einen Linearfaktor $(u + 1)$ somit $2u^3 + 3u^2 - 1 = (u + 1)(au^2 + bu + c) = au^3 + (a + b)u^2 + (b + c)u + c$. Somit muss sein $a = 2$, $b = 1$ und $c = -1$. Daher gilt $2u^3 + 3u^2 - 1 = (u + 1)(2u^2 + u - 1)$ und wir haben $P = 0$ genau dann wenn $u = -1$ oder wenn $2u^2 + u - 1 = 0$. Im letzten Fall finden wir $u = 1/2$ und $u = -1$ (also insgesamt ist $u = -1$ eine doppelte Nullstelle von P . Nur die Lösung $u = 1/2$ ist positiv und interessiert uns.

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

- (1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.
- (2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.
- (3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.
- (4) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw , $\bar{z}w$ und $\overline{z - w}$.
- (5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!
- (6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.
- (7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\bar{z} > 0$.
- (8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?
- (9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?
- (10) Formuliere die Regel von Horner!
- (11) Vereinfache $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ und $\frac{x^4 - y^8}{x - y^2}$.
- (12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw .
- (13) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?
- (14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu \mathbb{C} – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.
- (15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.
- (16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.
- (17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.
- (18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!
- (19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!
- (20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.
- (21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.
- (22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.
- (23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.
- (24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.
- (25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.
- (26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.
- (27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.
- (28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k , die nicht Null sein darf.)

(31) Finde ein kubisches Polynom p , sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

(33) Bestimme, wo die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (monoton) fallend ist.

(34) Bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$