Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 21 (von 08.02 bis 12.02)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 11.02:

(A) Lerne/Erledige die Aufgaben 4.49, 4.50(a)(b)(c)(f).

(B) Bitte auch Folgendes die letzte SWH studieren: die Ausarbeitung steht hier unten. Achte dabei auf Folgendes: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$, das Verhalten von h bei Aufgabe 4, die Ableitung von 3^{-x}.

Bis Freitag 12.02:

(A) Lerne und / oder erledige 4.51(a)(b)(c), 4.52(a)(c), 4.56 alle

Bis Dienstag 16.02:

Lerne/Erledige das Arbeitsblatt mit drei Niveaus und die Aufgaben 4.57(a)(e), 4.59(a)(c), 4.61(a), 4.64(c)(d).

Kernbegriffe dieser Woche:

Ableitungsregeln: Produktregel, Quotientenregeln, Ableitung von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Dienstag (1. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Kurze Besprechung der letzten SWH (a) Formulierung der Regeln, (b) Quadratische Gleichungen, (c) Verhalten von f bei Polen, (d) Pythagoras, (iii) Allgemeinheiten zu Funktionen vom Typ $f(t) = Ae^{-at}\sin(bt)$ mit $a > 0$. (iv) 4.49, 4.50(a)(b)(c)(f) und warum $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

(b) Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) das Arbeitsblatt hier unten mit drei Niveaus, (iii) Wurzelfunktion: $f(x) = x^z$ hat $f'(x) = zx^{z-1}$, für $z = 1/2$ folgt die Zeile auf Seite 92, (iv) 4.51(a)(b)(c), 4.52(a)(c), 4.56 alle

(c) Freitag (3. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. sSWH, (ii) das Arbeitsblatt mit drei Niveaus, (iii) 4.57(a)(e), 4.59(a)(c), 4.61(a), 4.64(c)(d)

Produktregel: Falls $f(x) = u(x)v(x)$, dann $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
Kehrwertregel: Falls $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, dann $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$.
Quotientenregel: Falls $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, dann $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
zweite Verknüpfungsregel: Falls $f(x) = g(h(x))$, dann $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.
Wichtige Funktionen: Falls $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Differenzieren!

Hier untne findest du mehrere Gruppen von Funktionen, die zu differenzieren sind. Gruppe A ist leichter als Gruppe B, Gruppe B ist leichter als Gruppe C. Entscheide selbst, wo dein Niveau ist, und gehe eine Gruppe hinauf, wenn du glaubst, dass du das kannst.

GRUPPE A

(a) $f(x) = \cos(x) - x$

(b) $g(x) = x^3 + e^x$

(c) $h(x) = 2^{3x}$

(d) $k(x) = e^{3x^2}$

(e) $m(x) = (x^2 - 3x - 1)^3$

(f) $p(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$

(g) $q(x) = \dfrac{1}{e^{-x} + 1}$

(h) $h(x) = x^2 e^{3x}$

(i) $k(x) = x^2 \sin(x)$

(j) $m(x) = \ln(2x + 3)$

GRUPPE B

(a) $f(x) = 5xe^{3x-2x^2}$

(b) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-1}}{e^x + e^{-x}}$

(c) $h(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2} + 1}$

(d) $k(x) = x \sin(x^2)$

(e) $m(x) = \ln(e^x + 3)$

(f) $p(x) = x \ln(x) - x$

(g) $q(x) = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x)^2 + 1}$

(h) $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

(i) $k(x) = x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x \ln(x)}$

(j) $m(x) = (\ln(\cos(x)))^2$

GRUPPE C

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2 + 3)}$

(b) $g(x) = \sin(2 \sin(x))$

(c) $h(x) = (xe^x + 1)^3$

(d) $k(x) = \ln(\ln(xe^x + 1))$

(e) $p(x) = e^{e^x}$

(f) $q(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(2x)}$

(g) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

(h) $k(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

SWH-c Differenzierregeln

Aufgabe 1: Formuliere Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel richtig.

Siehe Buch, oder Notizen.
Aufgabe 2: Gib die ersten Ableitungen von $a(x) = \sin(x)$, $b(x) = \cos(x)$, $c(x) = e^x$, $d(x) = 2^{-x}$ und $f(x) = \ln(x-1)$ an!

$a'(x) = \cos(x)$, $b'(x) = -\sin(x)$, $c'(x) = e^x$, $d'(x) = -\ln(2) \cdot 2^{-x}$, $f'(x) = \frac{1}{x-1}$.

Aufgabe 3: Die Funktion $g(x) = \tan(x)$ ist definiert als $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Benutze die Quotientenregel um die Ableitung von $\tan(x)$ zu finden! Gib also einen Beweis!

$g'(x) = \frac{\cos(x)^2 - (-\sin(x) \cdot \sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2}$ und dies kann man vereinfachen zu $\tan(x)^2 + 1$ einerseits, und $\frac{1}{\cos(x)^2}$ andererseits, und beide Ausdrücke sind gleich.

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion $h(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$ auf Nullstellen, Extremstellen, Definitionsbereich, Monotonie.

Nullstelle $x = -1$.
$D_h = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$
$h'(x) = \frac{x^2-2-(x+1)\cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x^2-2)^2}$. Da x^2+2x+2 keine Nullstellen hat, ist h' monoton fallend; $h'(x) < 0$ für alle x.

SWH-d Differenzierregeln

Aufgabe 1: Formuliere Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel richtig.

Siehe Buch oder Notizen.

Aufgabe 2: Gib die ersten Ableitungen von $a(x) = \cos(x)$, $b(x) = \sin(x)$, $c(x) = e^{-x}$, $d(x) = 3^x$ und $f(x) = \ln(x+1)$ an!

$a'(x) = -\sin(x)$, $b'(x) = \cos(x)$, $c'(x) = -e^{-x}$, $d'(x) = \ln(3) \cdot 3^x$, $f'(x) = \frac{1}{x+1}$

Aufgabe 3: Die Funktion $g(x) = \operatorname{cotan}(x)$ ist definiert als $\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Benutze die Quotientenregel um die Ableitung von $\operatorname{cotan}(x)$ zu finden! Gib also einen Beweis!

$g'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x)-\cos(x)\cos(x)}{\sin(x)^2} = \frac{-\sin(x)^2-\cos(x)^2}{\sin(x)^2}$ und dies ist einerseits $-\frac{1}{\sin(x)^2}$ und andererseits $-1-\operatorname{cotan}(x)^2$ gleich, und beide Ausdrücke sind gleich.

Aufgabe 4: Untersuche die Funktion $h(x) = \frac{x-1}{2x^2-1}$ auf Nullstellen, Extremstellen, Definitionsbereich, Monotonie.

Nullstelle $x = 1$
$D_h = \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$
$h'(x) = \frac{(2x^2-1)-4x(x-1)}{(2x^2-1)^2} = \frac{-2x^2+4x-1}{(2x^2-1)^2}$ und $h'(x) = 0$ genau dann, wenn $-2x^2 + 4x - 1 = 0$, also bei $x = \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot-2\cdot-1}}{-4} = 1 \pm \frac{1}{4}\sqrt{8} = 1 \pm \sqrt{1/2}$.
Achtung: Der Nenner ist immer positiv, sodass h' nicht bei $x = \pm\sqrt{1/2}$ von Vorzeichen wechselt.

Somit h ist monoton steigend auf den Intervallen $[1-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ und $(\sqrt{1/2, 1+\sqrt{1/2}}$, und weiter monoton fallend auf den Intervallen im Definitionsbereich. Achtung: die Punkte $x = \pm\sqrt{1/2}$ muss man schon ständig aus den Intervallen herausschneiden. Schau dir den Graphen mal mit Geogebra oder google an!

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(4) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(10) Formuliere die Regel von Horner!

(11) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(13) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

(20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.

(21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

(22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.

(23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.

(24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.

(25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.

(26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.

(27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.

(28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a.b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k, die nicht Null sein darf.)

(31) Finde ein kubisches Polynom p, sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

(33) Bestimme, wo die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (monoton) fallend ist.

(34) Bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$