Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 23 (von 22.02 bis 26.02)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 25.02:
Lerne die Notizen, die SWH vom vorigen Freitag und wiederhole so viele Aufgaben wie nur möglich!

Bis Freitag 26.02:
Mache das Arbeitsblatt zu den Differenzierregeln so weit fertig, sodass du dich bei der Anwendung der Differenzierregeln sicher fühlst! Mache dies **gewissenhaft**, weil ich davon ausgehe, dass du so einen Auftrag ernst nimmst. Dies nicht ernst zu nehmen ist nachteilhaft für dich. Teste dein Wissen und differenziere die Funktion

$$f(x) = \frac{xe^x}{1 + \cos^2(x)}$$

Bis Dienstag 01.03:
(A) Lerne/Erledige die Aufgaben 4.90, 4.92, 4.93 und 4.94.
(B) Bereite die Aufgaben 4.101(a)(d), 4.102(a)(d), 4.103 vor.

Kernbegriffe dieser Woche:

Ableitungsregeln: Produktregel, Quotientenregeln, Ableitung von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen, Umkehrfunktionen

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag (1. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) In Gruppen studiert ihr: die letzte SWH, Aufgabe 4.75 und 4.78, (iii) Eventuell wiederholen von 4.80(d)(e), 4.81(c)(e), (iv) 4.86(a)(d), 4.87(a)(c), 4.88(a)(c), oder Wiederholen Aufgaben voriger Woche.
- **(b)** Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Arbeitsblatt zum Einüben der Regeln
- **(c)** Freitag (3. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. sSWH, (ii) das Fussballproblem und andere Anwendunge: 4.90, 4.92, 4.93 und 4.94

Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel: Siehe Buch & Notizen. Sind Standardwissen!
Umkehrfunktion: Falls $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, dann nennt man g die Umkehrfunktion von f (und vice versa). Achtung für Definitionsbereich! Dann $g'(x)$ mittels impliziten Differenzierens.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Zum Einüben der Diff.-Regeln

Du kannst jetzt selbst entscheiden, welche Differenzierregeln du übst. Auch siehst du hier einen kleinen Niveauunterschied; es gibt Phase 1 und Phase 2.

Phase 1

Betrachte die folgenden Funktionen

$$a(x) = \sin(2x),\ b(x) = e^{-x},\ c(x) = x^2,\ f(x) = \ln(x+1) \text{ und } g(x) = \sqrt{x+2}.$$

☞**Kettenregel**: Verknüpfe die obigen Funktionen in Paaren und differenziere diese neuen Funktionen nach belieben. So kannst du $a(b(x))$, $b(a(x))$, $b(c(x))$, $c(b(x))$ und so weiter.

☞**Produktregel**: Multipliziere die obigen Funktionen in Paaren und differenziere diese neuen Funktionen nach belieben. So kannst du $a(x)b(x)$, $b(x)c(x)$, $f(x)c(x)$ und so weiter. Multipliziere eventuell auch noch mit x, also betrachte die Funktionen $xc(x)$, $xf(x)$, oder sogar $xa(x)b(x)$.

☞**Quotientenregel**: Bilde Quotienten von Funktionen und differenziere sie! Bilde und differenziere also $\frac{a(x)}{b(x)}$, $\frac{b(x)}{a(x)}$, $\frac{d(x)}{f(x)}$ und so weiter. Auch hier kannst du x selbst mitspielen lassen; versuche $\frac{a(x)}{x}$, $\frac{x}{a(x)}$, und so weiter zu differenzieren.

Phase 2

Schritt A: Überlege, bei welchen der obigen Regeln die Reihenfolge wichtig ist, und bei welchen nicht!

Schritt B: Betrachte jetzt Verknüpfungen, Produkte und Quotienten mit mindestens drei Funktionen, so wie $a(b(c(x)))$, $a(x)b(x)c(x)$, $\frac{a(x)b(x)}{c(x)}$ und so weiter.

Schritt C: Fasse deine Schwierigkeiten zusammen und überlege dir, wie du dir selbst weiter helfen kannst, und welche Übungen du dafür brauchst.

SWH-e Differenzierregeln

Aufgabe 1: (5 x 15%) Differenziere die folgenden Funktionen
(a) $f(x) = (x^2 - 2)^4$ $f'(x) = 4(x^2 - 2)^3 \cdot 2x = 8x(x^2 - 2)^3$

(b) $g(x) = \dfrac{x}{3} e^{x^2+1}$ $g'(x) = \frac{1}{3} e^{x^2+1} + \frac{x}{3} 2x e^{x^2+1} = \frac{1}{3}(1 + 2x^2) e^{x^2+1}$

Achtung: $e^{x^2+1} \neq e^{x^2} + 1$
Achtung: für solche Ausdrücke bitte nicht die Quotientenregel mit Nenner 3 anwenden, denn $3' = 0$. Es gilt ja $(\frac{a(x)}{3})' = \frac{1}{3} a'(x)$.

(c) $h(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$ $h'(x) = \frac{2x(1+x^4) - 4x^3 x^2}{(1+x^4)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(1+x^4)^2}$

Achtung: Wegen des Minuszeichens ist die Reihenfolge im Zähler bei der Quotientenregel schon wichtig!

(d) $k(x) = \ln(\sin(x))$ $k(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{cotan}(x)$

(e) $p(x) = e^{-\cos(2x)}$ $p'(x) = \sin(2x) e^{-\cos(2x)}$

Aufgabe 2: (15%) Finde eine Funktion f, sodass $f'(x) = 2f(x)$.

Jede Funktion vom Typ $f(x) = Ce^{2x}$ wobei C eine beliebige reelle Zahl ist. C darf auch Null sein, denn $f(x) = 0$ löst das Problem auch. Natürlich geht $C = 1$ auch, also $f(x) = e^{2x}$.

Aufgabe 3: (10%) Von der Funktion $q(x) = \sqrt[n]{x}$ weißt du, dass $(q(x))^n = x$. Differenziere diese letzte Beziehung und zeige, dass $q'(x) = \frac{1}{n(q(x))^{n-1}}$ und benutze dann die Definition von $q(x)$ sodass du einen Ausdruck für $q'(x)$ in x findest.

Aus $(q(x))^n = x$ folgt $nq(x)^{n-1} q'(x) = 1$, also $q'(x) = \frac{1}{n(q(x))^{n-1}}$ und somit $q'(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.

SWH-f Differenzierregeln

Aufgabe 1: (5 x 15%) Differenziere die folgenden Funktionen
(a) $f(x) = (x^3+1)^4$ $f'(x) = 12x^2(1+x^3)^3$. Achtung: $4 \cdot x^2 \cdot 3$ nicht so stehen lassen.

(b) $g(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{x+1}$ $g(x) = (x + \frac{x^2}{2})e^{x+1}$

Achtung: $e^{x+1} \neq e^x + 1$
Achtung: wegen $\frac{x^2}{2}$ nicht die Quotientenregel die Anwenden, denn die 2 im Nenner ist eine Zahl.
Es gilt $(\frac{a(x)}{2})' = \frac{1}{2}a'(x)$.

(c) $h(x) = \dfrac{x^4}{1+x^2}$ $h'(x) = \frac{4x^3(1+x^2)-2x\cdot x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{4x^3+2x^5}{(1+x^2)^2}$
Achtung: Reihenfolge ist bei der Quotientenregel schon wichtig.

(d) $k(x) = \ln(\cos(x))$ $k'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

(e) $p(x) = e^{-\sin(2x)}$ $p'(x) = -2\cos(2x)e^{-\sin(2x)}$

Aufgabe 2: (15%) Finde eine Funktion f, sodass $f'(x) = -f(x)$.

Jede Funktion vom Typ $f(x) = Ce^{-x}$ wobei C eine beliebige reelle Zahl ist. C darf auch Null sein: $f(x) = 0$ ist auch eine Lösung.

Aufgabe 3: (10%) Von der Funktion $q(x) = \sqrt[n]{x}$ weißt du, dass $(q(x))^n = x$. Differenziere diese letzte Beziehung und zeige, dass $q'(x) = \frac{1}{n(q(x))^{n-1}}$ und benutze dann die Definition von $q(x)$ sodass du einen Ausdruck für $q'(x)$ in x findest.

Aus $(q(x))^n = x$ folgt $nq(x)^{n-1}q'(x) = 1$, also $q'(x) = \frac{1}{n(q(x))^{n-1}}$ und somit $q'(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$.

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(4) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(10) Formuliere die Regel von Horner!

(11) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(13) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

(20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.

(21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

(22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.

(23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.

(24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.

(25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.

(26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.

(27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.

(28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a.b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k, die nicht Null sein darf.)

(31) Finde ein kubisches Polynom p, sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

(33) Bestimme, wo die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (monoton) fallend ist.

(34) Bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

(35) Differenziere die Funktion ... (siehe zB Arbeitsblatt Woche 21)

(36) Untersuche die Funktion ... auf Monotonie, Krümmung, Nullstellen, maximalen Definitionsbereich, ...