Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 25 (von 07.03 bis 11.03)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 10.03:
Erhole dich von der SA!

Bis Freitag 11.03:
Ihr seid auf Sprachwoche!

Bis zum ersten Mal nach der Sprachreise:
Geometrie mit GeoGebra: Betrachte die Menge der Punkte definiert durch: (a) $x^2 + 3y^2 = 1$, (b) $x^2 - y^2 = 1$, (c) $x^2 - y^2 = 0$. Wie heißen diese Figuren? BONUS: Was wäre mit dem dreidimensionalen Körper: (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 10$?

Kernbegriffe dieser Woche:

Ableitungsregeln: Produktregel, Quotientenregeln, Ableitung von trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen, Umkehrfunktionen

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Dienstag (1. und 2. Std in Raum 222): **SCHULARBEIT!!!**

(b) Donnerstag (2. Std): (i) Schularbeitsbesprechung (a) Auflisten und Kategorisieren der Fehler, (b) Verbesserung, (c) Lernen von den Fehlern, (d) Wie konnten die Fehler passieren, und was muss passieren, dass sie nicht mehr vorkommen? (ii) Fragenrunde und Ausblick auf neue Kapitel: Kugel, Kegel, 3D-Geometrie und danach kommt wieder eine große Phase Wahrscheinlichkeit – wie passt es euch am besten im Hinblick auf die letzte SA, denn da sollte Wahrscheinlichkeitstheorie dabei sein!

Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel: Siehe Buch & Notizen. Sind Standardwissen!
Umkehrfunktion: Falls $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, dann nennt man g die Umkehrfunktion von f (und vice versa). Achtung für Definitionsbereich! Dann $g'(x)$ mittels impliziten Differenzierens.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Schularbeitsstoff für den 8. März

- Hauptthema: Differenzieren und Funktionen. Kapitel 2,3 und 4 aus dem Buch. Somit auch die Grundkompetenzen dazu: AN 1.1, AN 1.2, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.1 (nicht den Begriff Stammfunktion), AN 3.2 (nicht Stammfunktion), AN 3.3.
- Alle Arbeitsblätter, Aufgaben und Stundenwiederholungen zum Thema Differenzieren gehören zum Stoff.
- Sonstige Grundkompetenzen: FA 1.1, FA 1.2, FA 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.8, FA 1.9, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 2.4, FA 2.5, FA 2.6, FA 3.1, FA 3.2, FA 3.3, FA 3.4, FA 4.1, FA 4.2, FA 4.3, FA 4.4, FA 5.1, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.4, FA 5.5, FA 5.6, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, FA 6.5, FA 6.6. AG 2.1, AG 2.2, AG 2.3, AG 3.3, AG 3.4, AG 4.1, AG 4.2.

Schularbeitsstoff für den 8. März

- Hauptthema: Differenzieren und Funktionen. Kapitel 2,3 und 4 aus dem Buch. Somit auch die Grundkompetenzen dazu: AN 1.1, AN 1.2, AN 1.3, AN 2.1, AN 3.1 (nicht den Begriff Stammfunktion), AN 3.2 (nicht Stammfunktion), AN 3.3.
- Alle Arbeitsblätter, Aufgaben und Stundenwiederholungen zum Thema Differenzieren gehören zum Stoff.
- Sonstige Grundkompetenzen: FA 1.1, FA 1.2, FA 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.8, FA 1.9, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 2.4, FA 2.5, FA 2.6, FA 3.1, FA 3.2, FA 3.3, FA 3.4, FA 4.1, FA 4.2, FA 4.3, FA 4.4, FA 5.1, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.4, FA 5.5, FA 5.6, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, FA 6.5, FA 6.6. AG 2.1, AG 2.2, AG 2.3, AG 3.3, AG 3.4, AG 4.1, AG 4.2.

Logarithmus und Exponenten

Aufgabe 1: Löse nach x

(a) $3 = 2 \cdot 5^x$ $\quad x = \frac{\ln(3/2)}{\ln(5)}$

(b) $5^{2x-1} = 17$ $\quad x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\ln(17)}{\ln(5)}$

(c) $\ln(x^2+3) = 8$ $\quad x = \pm\sqrt{e^8 - 3}$

(d) $e^{-0,55x} = 0,5$ $\quad x = \frac{\ln(0,5)}{-0,55} = \frac{\ln(2)}{0,55}$

Aufgabe 2: Begründe:

(a) $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ wenn $a, b > 0$
$a = e^x$ $b = e^y$ und $\ln(ab) = \ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$

(b) $\ln(a^r) = r\ln(a)$, wenn $a > 0$
genau so: $a = e^x$, dann $a^r = e^{rx}$ dann nimm ln

(c) $\ln(a^2 = 2\ln(|a|)$ für alle $a \in \mathbb{R}^*$
bei (b) nimm $r = 2$ und benutze $a^2 = |a|^2$ und $|a| > 0$.

(d) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ wenn $a, b > 0$.
wie (a), nimm $a = e^x$, $b = e^y$ sodass $\frac{a}{b} = e^{x-y}$ dann nimm ln

(e) $(a^r)^s = a^{rs}$
für natürliche Zahlen reicht es zuerst, ich zeige ein Beispiel: $(a^r)^4 = a^r a^r a^r a^r = a^{4r}$, für reelle s ist die Geschichte noch etwas delikat.

(f) $\log_b(X) = \frac{\ln(X)}{\ln(b)}$
$X = b^r$ mit $r = \log_b(X)$. Schreibe $b = e^s$ mit $s = \ln(b)$, dann $X = e^{rs}$, also $\ln(X) = rs = \ln(b)\log_b(X)$.

(g) Wenn $f(x) = ae^{bx}$, dann $f(x+1) = e^b f(x)$ und $f(0) = a$.
$f(0) = ae^0 = a1 = a$ und $f(x+1) = ae^{b(x+1)} = ae^{bx}e^b = e^b(ae^{bx}) = e^b f(x)$.

Aufgabe 3: Bei radioaktivem Zerfall $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, wobei $N(t)$ ist die Anzahl der Atome, die noch vorhanden sind. N_0 und λ sind positive Zahlen.

(a) Skizziere einen Graphen von $N(t)$.
Nimm zB $N_0 = 100$, $\lambda = 0,25$ und benutze GeoGebra.

(b) Interpretiere N_0 und λ.
N_0 ist Anfangsmenge, also $N(0)$ und λ ist die Zerfallsrate: $\lambda = -\frac{N'(t)}{N(t)}$ was auch die relative Änderungsrate ist.

(c) Zeige, dass $N'(t) = -\lambda N(t)$.
Da $N'(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$ ist dies evident.

(d) Die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ist die Zeitspanne, nach der nur noch die Hälfte des Stoffes vorhanden ist, somit $N(T_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0$. Drücke $T_{1/2}$ in λ aus!
$\frac{1}{2}N_0 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$ also $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$ sodass $2 = e^{\lambda T_{1/2}}$ und somit $\lambda T_{1/2} = \ln(2)$ sodass endgültig $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

Mini-Checkup zu Sinus und Co

Aufgabe 1. Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$ mit $A = (-3|2)$, $B = (2|-1)$ und $C = (5|10)$. Kontrolliere mit dem Skalarprodukt, ob dieses Dreieck rechtwinklig ist.

Aufgabe 2. Gegeben ist $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$. Berechne die Periode, die Nullstellen, die Extremstellen und zeichne den Graphen.

Aufgabe 3. Gegeben ist eine Funktion $g(x) = a \cdot \cos(bx)$ und wir wissen, dass die Periode 10π beträgt. Des Weiteren beträgt der Unterschied zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert der Funktion 7. Finde a und b.

Aufgabe 4. Zeichne die Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$, $g_1(x) = \cos(x)$, $f_+(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f_-(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, $g_2(x) = -\cos(x)$ in eine Grafik ein, und entscheide, welche gleich sind. Hinweis: Benutze unterschiedliche Farben.

Aufgabe 5. Begründe: (a) $\sin^2(x) = (1 - \cos(x))(1 + \cos(x))$, (b) $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, (c) $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$, (d) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

Aufgabe 6. In einem Dreieck $\triangle ABC$ ist gegeben, dass $\angle BAC = 25^o$ und $\angle ABC = 55^o$. Des Weiteren beträgt die Länge der Höhenlinie auf AB $5cm$. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks!

Lösungen:

(1) $\overrightarrow{AB} = (5|-3)$, $\overrightarrow{BC} = (3|11)$ und $\overrightarrow{AC} = (8|8)$. Keines der drei möglichen Skalarprodukte ist Null, somit ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

(2) Periode π; Nullstellen $\sin(2x) = 0$, also $2x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, also $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$. Extremstellen sind natürlich dazwischen, also bei $x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$. Zum Zeichnen: Amplitude ist 3 und Periode ist π, damit sollte es gehen, sonst bei Google `3*sin(2*x)` oder bei GeoGebra $f(x) = 3 * \sin(2x)$ eingeben und anschauen.

(3) $10\pi = \frac{2\pi}{b}$ also $b = \frac{1}{5} = 0,2$. Der maximale Wert ist a, der minimale Wert ist $-a$. Damit der Unterschied 7 ist, muss a also $3\frac{1}{2}$.

(4) $f_+(x) = \sin(x + \pi/2) = \cos(x)$, $f_-(x) = -\cos(x)$

(5) (a) $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = (1 - \cos(x))(1 + \cos(x))$, (b) $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$, (c) geht genau wie (b)

(6) Mache eine Skizze dazu! Sei dabei E der Fusspunkt der Höhenlinie auf AB. Dann $CE = 5cm$. Des Weiteren $AE = 5\tan(25^o)$ und $BE = 5\tan(55^o)$. Somit $AB = AE + BE$ und daher ist die Fläche $\frac{1}{2}AB \cdot CE$.

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(4) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(10) Formuliere die Regel von Horner!

(11) Vereinfache $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ und $\frac{x^4 - y^8}{x - y^2}$.

(12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(13) Zeige, dass $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

(20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.

(21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

(22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.

(23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.

(24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.

(25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.

(26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.

(27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.

(28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a.b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k, die nicht Null sein darf.)

(31) Finde ein kubisches Polynom p, sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

(33) Bestimme, wo die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (monoton) fallend ist.

(34) Bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

(35) Differenziere die Funktion … (siehe zB Arbeitsblatt Woche 21)

(36) Untersuche die Funktion … auf Monotonie, Krümmung, Nullstellen, maximalen Definitionsbereich, …