Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 2 (von 14.09 bis 18.09)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 17.09:
Erledige[2] die Aufgaben 1.15(c)(d)(f)(g)(i), 1.27(a)(d), 1.30, 1.31 und lies dir die Aufgabe 1.02 durch, damit du sie verstehst. (Im Unterricht nachfragen, falls es Probleme gibt.)

Bis Freitag 18.09:
Erledige die Aufgaben 10.04, 10.06(a), 10.07(b), 10.09(a)(b), 10.10(a), 10.11, 10.12(a)(b), 10.13 und 10.14(a) und lerne die Begriffe von Seite 231.

Bis Dienstag 22.09:
Erledige die Aufgaben 10.15(a), 10.19(a), 10.22, 10.23 (alle), 10.24(a)(b)(c), (iii) Gauß'sche Ebene: 10.32(a)(b)(c)

Kernbegriffe dieser Woche:

GK aus der 6. Klasse; Algebra: Gleichungen mit Koeffizienten in einer Menge und ihre Lösungen. Komplexe Zahlen. Die Zahl i.

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag (1. Std): HÜ-Bespr. und mSWH, (ii) Regel von Horner mit Beispielen, (iii) 1.15(c)(d)(f)(g)(i), 1.27(a)(d), 1.30, 1.31
- **(b)** Donnerstag (2. Std): HÜ-Bespr. und mSWH, (ii) Einführung in $\mathbb{C}$ – siehe unten, (iii) Begriffe auf Seite 231 und die Aufgaben 10.04, 10.06(a), 10.07(b), 10.09(a)(b), 10.10(a), 10.11, 10.12(a)(b), 10.13 und 10.14(a)
- **(c)** Freitag (3. Std): HÜ-Bespr. (ii) 10.15(a), 10.19(a), 10.22 (study exercise), 10.23 (alle), 10.24(a)(b)(c), (iii) Gauß'sche Ebene: 10.32(a)(b)(c), (iv) Zusammenfassung und Wiederholung vom Stoff bis jetzt.

Ein Polynom von Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

Ein Polynom von Grad n hat höchstens $n-1$ Extremstellen.

Falls $p(x) = (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)\cdots$ dann sind die Nullstellen von p $x=a$, $x=b$, $x=c$, …

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

[2] „Erledigen" heißt hier, dass die Aufgaben schon im Unterricht angefangen wurden, und dass die SchülerInnen gebeten werden, das noch nicht im Unterricht erledigte zu Hause fertig zu machen, aber unter Berücksichtigung, dass die schon im Unterricht erledigten Aufgaben gelernt werden bzw. schon verstanden wurden.

Kurze Einführung in i

Eine KONSTRUKTION von der Menge der komplexen Zahlen in einigen Schritten.

(1) Die Gleichung $x^2+1=0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. Wir erweitern jetzt $\mathbb{R}$ zuerst um genau diese Zahl, die diese Gleichung lösen würde und schreiben i für eine jetzt noch recht unbekannte „Zahl“ und FORDERN $i^2 = i \cdot i = -1$, also $i \notin \mathbb{R}$.

(2) Wir FORDERN, dass recht normale Rechenregeln weiter existieren. Daher verlagen wir, dass $i+i=2i$, aber auch $\frac{1}{2}i+\frac{1}{3}i=\frac{5}{6}i$ usw. Aber dann müssen wir auch haben

$$2i \cdot 2i = 2 \cdot 2 \cdot i \cdot i = 4 \cdot -1 = -4$$

also $x^2+4=0$ wird von $2i$ gelöst.

(3) Wir finden dann auch, dass $-i \cdot -i = +i^2 = +(-1) = -1$, also $-i$ löst AUCH die Gleichung $x^2+1=0$. Daher $x^2+1=(x-i)(x-(-i))=(x-i)(x+i)$.

(4) Mit den Zahlen $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ können wir also recht leicht rechnen. Jetzt wollen wir das mit den reellen Zahlen an sich verknüpfen können. Wir wollen also $a+bi$ als Zahl behandeln können, wobei $a,b \in \mathbb{R}$. Es sollte gelten $(a+bi)+(c+di)=[a+c]+[b+d]i$ und $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bic+dbii=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

(5) Es fehlt noch das Dividieren. Das Problem ist gelöst, falls wir zu $a+bi$ den Kehrwert kennen. Wir wollen sicher haben $\frac{a+bi}{a+bi}=1$. Achte auf folgendes: wenn $a+bi$ gegeben ist, dann ergibt das Produkt $(a+bi)(a-bi)=a^2+(ib)^2=a^2+b^2$ eine nichtnegative reelle Zahl. Also $\frac{1}{a+bi}=\frac{(a-bi)}{(a-bi)(a+bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

ACHTUNG: Der Kehrwert von $a+bi$ existiert also nur nicht, wenn $a^2+b^2=0$, also wenn a und b beide Null sind.

(6) Jetzt haben wir die einfachen Rechenregeln für $\mathbb{C}$ gefunden. Das Motto ist: Rechne mit i als wäre es eine Variable, aber ersetze wenn möglich i^2 durch -1. So zum Beispiel $i^7 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = (-1)^3 \cdot i = -i$.

(7) Der Trick von (5) hat eine Bedeutung: Für die komplexe Zahl $z=a+bi$ nennen wir $a-bi$ die dazu komplex konjugierte Zahl und notieren das $\overline{z}$. Also $\overline{3-i}=3+i$ und $\overline{-5+3i}=-5-3i$. Es gilt für $z=a+bi$, dass $\overline{z}=a-bi$ und daher $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \geq 0$ und $z\overline{z}$ ist nur Null, wenn $z=0=0+0i$. Man nennt $\sqrt{z\overline{z}}$ den Betrag von z und schreibt $|z|$ dafür. Klarerweise $\overline{\overline{z}}=z$.

Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(a) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(b) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(c) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(d) Berechne für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(e) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(f) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(g) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(h) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(i) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(j) Formuliere die Regel von Horner!

(k) Vereinfache $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ und $\frac{x^4 - y^8}{x - y^2}$.