Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 32 (von 02.05 bis 06.05)

Hausaufgaben [1]

Bis Dienstag 10.05:
Lerne und Erledige die Aufgaben 9.122, 9.125, 9.127, 9.130 und 9.132

Kernbegriffe dieser Woche:

Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert, empirische Varianz, Mittelwert

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Dienstag (1. Std.): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Aufgaben 9.122, 9.125, 9.127, 9.130 und 9.132, (iii) Besprechung von SA-Stoff: Gruppenarbeit zu verschiedenen Themen: Achte auf Grundkompetenzen

Eine Zufallsvariable ist eine Funktion bei einem Zufallsversuch; sie ordnet jedem Ergebnis eine Zahl zu.
Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsvariable X ist die Zuordnung $x \mapsto P(X = x)$, wobei x eine (reelle) Zahl ist; es werden also die Wahrscheinlichkeiten auf Ergebnisse von X beschrieben.
Erwartungswert: Sei X eine Zufallsvariable, dann $E(X) = \sum_i P(X = a_i)a_i$ wobei die Summe über alle Werte a_i geht, die X annehmen kann.
Varianz: Sei X eine Zufallsvariable, dann $\sigma_X^2 = E[(X - EX)^2] = E(X^2) - (EX)^2 \geq 0$.
Fakultätsfunktion: Es gibt $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ Weisen n unterschiedliche Dinge anzuordnen. Man definiert aber $0! = 1$
Binomialverteilung: Wenn X binomialverteilt mit Parametern n und p ist, dann $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$ und $Var(X) = np(1-p)$.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Antworten zum Auftrag zu Stochastik (29. April)

Aufgabe 9.95: Methode 1 – Hausverstand und genau: (a) $\frac{28}{30} \cdot \frac{27}{29}$, (b) $\frac{2}{30} \cdot \frac{28}{29} + \frac{28}{30} \cdot \frac{2}{29} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 28}{30 \cdot 29}$, (c) $\frac{2}{30} \cdot \frac{1}{29}$. Methode 2 – Binomialannäherung (a) $(\frac{14}{15})^2$, (b) $\binom{2}{1}\frac{1}{15}\frac{14}{15}$, (c) $\frac{1}{15^2}$. Bei (c) wirst du eine deutliche Abweichung sehen: du hast den p-Wert auf einmal halbiert, wenn du den Bläugigen ausgewählt hast.

Aufgabe 9.98: Binialverteilung mit $p = 0,4$ und $n = 20$. Also wenn X = Anzahl der Linkshänder bei diesem Experiment, dann $P(X = 10) = \binom{20}{10}(0,4)^{10} \cdot (0,6)^{10}$.

Aufgabe 9.99: Nicht vergessen: $P(X \leq k) = 1 - P(X > k)$. Auch sinnvoll $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k = (p + (1-p)^n = 1^n = 1$. Denke bitte öfter und öfter an das Dreieck von Pascal.

Aufgabe 9.100: Binomialverteilung $n = 20$, $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ (a) $\binom{20}{10}\frac{1}{2^{20}}$ (b) $(\binom{20}{17} + \binom{20}{18} + \binom{20}{19} + 1) \cdot \frac{1}{2^{20}}$, (c) $(\binom{20}{3} + \binom{20}{2} + \binom{20}{1} + 1) \cdot \frac{1}{2^{20}}$, da $\binom{20}{k} = \binom{20}{n-k}$ sind die Ergebnisse bei b und c gleich, (d) $(\binom{20}{4} + \binom{20}{5} + \binom{20}{6}) \cdot \frac{1}{2^{20}}$.

Aufgabe 9.101: Binomial mit $n = 10$ und $p = 0,7$. Daher $P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot (0,7)^8 \cdot (0,3)^2 + 10 \cdot (0,7)^9 \cdot (0,3) + (0,7)^{10}$.

Aufgabe 9.108: Diese Aufgabe ist gedanklich etwas anstrengend. Am besten dreht man die Prozesse um: du wählst zwar eine Seite aus, aber es ist wegen der Symmetrie egal, welche Seite du wählst. Wir können also auch ganz genau davon ausgehen, dass wir die Seite vorher vor dem Drucken schon auswählen und dann können wir eine Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dies ist Seite 100. Dann wird das Drucken vorgenommen und die Schreibfehler kommen dann jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 1/320$ auf Seite 100. Es gibt aber 40 Druckfehler. Daher sind die Druckfehler binomialverteilt mit $n = 40$ und $p = 1/320$. Daher: (a) $P(X = 0) = (1-p)^{40} = (\frac{319}{320})^{40} \approx 0,29$. (b) $P(X = 1) = 40 \cdot p \cdot (1-p)^{39} = \frac{40 \cdot 319^{39}}{320^{40}}$ und dies kann man leicht mit (a) vergleichen, denn es wurde eine 319 gegen eine 40 eingetauscht: $P(X = 1) = \frac{40}{319} \cdot P(X = 0) \approx 0,036$. (c) Mindestens 2 ist also alles, außer 0 und 1, daher $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$, also, (c)=1-(a)-(b).

ACHTUNG: Eine ganz ähnliche und auch klassische Aufgabe ist: Ein Rosinenkuchen mit 100 Rosinen wird in 16 gleich große Stücke geschnitten. Sei X die Anzahl der Rosinen in einem von dir willkürlich ausgewählten Kuchenstück. (a) Berechne $P(X = k)$ für mehrere Werte von k, zB $k = 0, 10, 20, 50, 60, 90$; (b) Für welchen k-Wert ist diese Wahrscheinlichkeit am größten? Vergleiche mit Aufgabe 9.119

Aufgabe 9.112: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket keine Mängel aufweist ist $1 - p = \left(\frac{99}{100}\right)^{20} \approx 0,82$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket Mängel aufweist ist also $p = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{20} \approx 0,18$. Da 1000 eine große Zahl ist können wir das Gesetz der großen Zahlen anwenden: ca. 82% der Pakete wird makellos sein, etwa 18% nicht, also etwa 180 Pakete werden zurückbekommen. Später auf Seite 216 steht auch folgenden Satz erklärt (und dies müsst ihr auch auswendig wissen):

Sei X binomial verteilt mit Parametern n und Erfolgswahrscheinlichkeit p, dann

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = np, \quad Var(X) = \sigma_X^2 = np(1-p)$$

Bei Aufgabe 9.112 liefert das dann gleich $E(X) = np = 1000 \cdot 0,18 = 180$.

Hinweis für Schularbeit: Manche Vertiefungsseiten sind gute Typ-2-Aufgabenquellen!

Schularbeitsstoff für SA Mai 2016

- GRUNDKOMPETENZEN: AG ALLES; FA 1.1, FA 1.2, FA 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.8, FA 1.9, FA 2.1, FA 2.2, FA 2.3, FA 2.4, FA 2.5, FA 2.6, FA 3.1, FA 3.2, FA 3.3, FA 3.4, FA 4.1, FA 4.2, FA 4.3, FA 4.4, FA 5.1, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.4, FA 5.5, FA 5.6, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, FA 6.5, FA 6.6. AG 2.1, AG 2.2, **WS 1.3, 1.4, WS 2.1 bis 3.3** (AN wurde gegen WS eingetauscht).
- KAPITEL: 9 und das was wir aus Kapitel 6 und 7 gemacht haben.
- ALLE Hand-Outs, Korrekturvorlagen, Notizen ab Woche 23 – also auch die zu Logarithmen und Sinus und so! Nur das Differenzieren fällt zuerst weg.

Sei Ω ein Ereignisraum. Wir werden im Unterstehenden das Beispiel eines einmaligen Wurfes mit einem Spielwürfel nehmen. In diesem Fall $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir werden die Elemente in Ω mit einem kleinen griechischen Buchstaben andeuten: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Im konkreten Beispiel des Spielwurfs sind die Elemente von Ω auch Zahlen, dies muss aber nicht sein. Wenn man aber mit zwei Spielwürfeln wirft, dann besteht Ω aus Zahlenpaaren $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ und so weiter.

Auf unserem Ereignisraum Ω können wir **stochastische Variablen, a.k.a. Zufallsvariable**, definieren. Sie werden mit großen, lateinischen Buchstaben X, Y, Z, T, S, usw. bezeichnet. Wir werden zwei konkrete Beispiele nehmen: $X(1) = 0$, $X(2) = 1$, $X(3) = 0$, $X(4) = 1$, $X(5) = 0$ und $X(6) = 1$, also $X = 1$ bei einer geraden Augenanzahl und $X = 0$ wenn die Augenanzahl ungerade ist. Für eine zweite Zufallsvariable Y nehmen wir $Y(\omega) = \omega^2$, also Y ist das Quadrat der Augenanzahl.

Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable X ist wie folgt definiert:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\omega_i)\,.$$

Da X bei verschiedenen ω-Werte denselben Wert ergeben kann, wie beim gewählten Beispiel, so kann man einige der ω_i zusammennehmen, und man bekommt:

$$E(X) = \sum_{X-Werte\ x} P(X = x)x$$

Tatsächlich gilt $P(X = x)$ ist die Summe alle $P(\omega_i)$ für welche gilt $X(\omega_i) = x$, man addiert die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse ω_i für welche X den Wert x hat.

Für unser Beispiel: $P(X = 1) = \frac{1}{2}$ und $P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Daher $E(X) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$. Tatsächlich bekommen wir auch:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)P(\omega_i) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Für Y finden wir den folgenden Erwartungswert:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i)P(\omega_i) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6}\,.$$

Wenn X und Y Zufallsvariablen sind, dann auch $X+Y$, und sie ist definiert durch $(X+Y)(\omega_i) = X(\omega_i) + Y(\omega_i)$. In unserem Beispiel gilt also $(X + Y)(1) = 0 + 1 = 1$, $(X + Y)(2) = 1 + 4 = 5$, $(X + Y)(3) = 0 + 9 = 9$ und so weiter. Falls a eine reelle Zahl ist, dann ist $a \cdot X$ auch eine Zufallsvariable und sie ist definiert durch $(a \cdot X)(\omega_i) = a \cdot X(\omega_i)$. Die Zahl a kann man auch als Zufallsvariable auffassen, und sie nimmt halt bei jedem Ereignis den Wert a an. So können wir die Zahl 1 auch als Zufallsvariable auffassen; sie ist immer 1, was der Spielwürfel auch zeigt. Der Erwartungswart von a ist dann natürlich a; $E(a) = \sum aP(\omega_i) = a \sum_i P(\omega_i) = a \cdot 1 = a$.

Folgende Formeln sind eigentlich relativ klar, aber auch gigantisch wichtig. Seien also X, Y Zufallsvariablen und a eine Zahl, dann

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)\,, \qquad E(a \cdot X) = a \cdot E(X)\,, \qquad E(a) = a\,.$$

In unserem Beispiel kann man dies leicht nachrechnen. Die erste Gleichheit überlasse ich euch, für die anderen kann man einfach $a = 4$ nehmen, dann ist $4X$ die Zufallsvariable die 4 ist, wenn ω_i gerade ist, und 0 ist, wenn ω_i ungerade ist. Dann ist natürlich $E(4X) = 2$.

Was können wir jetzt mit dem Erwartungswert ausrechnen? Was ist zum Beispiel der Erwartungswert vom Erwartungswert? Dies ist recht einfach, $E(E(X)) = E(X)$, denn $E(X)$ ist eine Zahl. So ist in unserem Beispiel $E(X) = \frac{1}{2}$ und $E(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Wir können eine Zufallsvariable auch um eine Zahl verschieben: $X - a$ nimmt ständig den Wert $X(\omega_i) - a$ bei jedem Ereignis ω_i an. Klar ist, dass $E(X - a) = E(X) - E(a) = E(X) - a$, und daher verschiebt sich dann der Erwartungswert auch um a.

Interessant wird es, wenn wir für a den Erwartungswert von X nehmen: Die Zufallsvariable $X - E(X)$ hat Erwartungswert Null. Tatsächlich $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$. Wenn wir in unserem Beispiel X um $\frac{1}{2}$ verschieben bekommen wir eine neue Zufallsvariable $X - \frac{1}{2}$ und diese ist $-\frac{1}{2}$ bei einer ungeraden Augenanzahl und $\frac{1}{2}$ bei einer geraden Augenanzahl. Klar ist, dass jetzt der Erwartungswert Null ist. Man verschiebt die Zufallsvariable also so, dass der Erwartungswert auf Null gelegt wird.

Man kann Zufallsvariablen auch mit einander multiplizieren. So kann man also X^2 oder XY oder sogar Xe^Y ausrechnen. Man muss nur die Ereignisse richtig einsetzen: $XY(\omega_i) = X(\omega_i)Y(\omega_i)$. Also, Zufallsvariablen kann man genau so addieren, multiplizieren, exponentieren, quadrieren und so weiter, wie man mit Funktionen tun kann.

Im Allgemeinen gilt nicht dass $E(X^2) = (E(X))^2$, oder dass $E(XY) = E(X)E(Y)$, oder dass $E(e^X) = e^{(E(X))}$. In unserem Beispiel $X^2 = 0$ bei ungerader Augenanzahl und $X^2 = 1$ bei gerader Augenanzahl. Daher $E(X^2) = E(X) = \frac{1}{2}$ und $(E(X))^2 = \frac{1}{4}$. Versuche es mal selbst für andere Kombinationen.

Die **Varianz** σ_X^2 einer Zufallsvariable X ist der Erwartungswert von $(X - E(X))^2$. Also, $X - E(X)$ ist eine Distanz zum Mittelwert, und wenn wir quadrieren ist dieses Ergebnis nicht negativ. Somit ist $E(X - E(X))^2$ auch nicht negativ. Die Varianz beschreibt also die Erwartung einer Distanz zum Erwartungswert. Daher beschreibt die Varianz etwas wie die Streuung; wenn X oft weit von seinem Erwartungswert liegt, dann ist $(X - E(X))^2$ also oft groß, und daher ist $E(X - E(X))^2$ dann auch eher groß. Das Quadrat ist gewählt, weil $E(X - E(X)) = 0$. Weil die Varianz nicht negativ ist, kann man die Wurzel ziehen, und man bekommt dann σ_X, **die Standardabweichung von** X.

Eine interessante Frage ist, wann ist die Varianz von X Null? Negativ kann sie nicht sein, aber was ist mit Null? Nun, $Z := (X - E(X))^2$ ist nicht negativ. Und $\sigma_X^2 = E(Z)$ und dies ist zu berechnen durch

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i)Z(\omega_i)$$

aber $P(\omega_i) \geq 0$ und $Z(\omega_i) \geq 0$, und daher ist diese Summe nur Null, wenn alle Produkte $P(\omega_i)Z(\omega_i)$ Null sind, aber dann müssen alle $Z(\omega_i)$ Null sein. Dies ist also genau dann der Fall, wenn $X = E(X)$, m.a.W., wenn X eine konstante Zufallsvariable ist. Sobald X nicht mehr konstant ist, also mehrere Werte annehmen kann, dann ist seine Varianz größer als Null.

Man kann eine nutzliche Formel herleiten. Schreiben wir einfachheitshalber a für $E(X)$, was in Ordnung ist, weil $E(X)$ eine Zahl ist. Dann

$$E((X - E(X))^2) = E((X - a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - E(2aX) + E(a^2)$$

$$= E(X^2) - 2aE(X) + a^2 = E(X^2) - 2a \cdot a + a^2 = E(X^2) - a^2$$

Also $\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2$. In unserem einfachen Beispiel gilt $E(X^2) = \frac{1}{2}$ und $(E(X))^2 = \frac{1}{4}$, und somit ist $\sigma_X^2 = \frac{1}{4}$.

Zum Begriff der empirischen Varianz

Die empirische Varianz soll die Streuung der Daten beschreiben.

Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Liste mit Daten. Dann ist $\overline{x}$ der Mittelwert und er wird durch folgende Formel berechnet:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

In der Liste $x_1, \ldots, x_n$ können einige x_i gleich sein.

Manchmal ist es besser, die Liste zu ordnen, und bei jedem Wert dazu zu schreiben, wie oft er vorkommt. Aus der Liste $x_1, \ldots, x_n$ machen wir eine neue Liste $a_1, \ldots, a_k$ die aus den Werten in der Liste $x_1, \ldots, x_n$ besteht. Somit kommt in der Liste $a_1, \ldots, a_k$ keine Zahl zweimal vor und also $k \leq n$ (nicht mehr Werte als Zahlen). Sei dann $p(a_i)$ wie oft der Wert a_i in der Liste $x_1, \ldots, x_n$ vorkommt, dann

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} p(a_i) a_i = \sum_{i=1}^{k} r(a_i) a_i$$

wobei $r(a_i)$ die relative Häufigkeit von a_i ist.

Die **empirische Varianz** s^2 ist nun wie folgt definiert:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x - \overline{x})^2}{n} = \overline{(x - \overline{x})^2}\,.$$

Ich möchte euch den **Verschiebungssatz** zeigen, oder auf jeden Fall eine Anwendung davon. Ich nehme dazu zuerst ein Beispiel: $n = 3$. Dann gibt es also drei Zahlen x_1, x_2 und x_3. Ich kann sie dann auch mit a, b und c bezeichnen. Sei dann m der Mittelwert, also $\overline{x} = m = (a + b + c)/3$. In diesem Fall

$$s^2 = \frac{1}{3}\Big((a - m)^2 + (b - m)^2 + (c - m)^2\Big)$$

und ich kann diese Klammern auflösen, denn $(a - m)^2 = a^2 - 2am + m^2$. Somit bekomme ich insgesamt folgendes Ergebnis:

$$s^2 = \frac{1}{3}\Big(a^2 + b^2 + c^2 - 2am - 2bm - 2cm + 3m^2\Big)$$

Die ersten drei Terme bilden den **Mittelwert der Quadrate**: $\overline{x^2} = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$. Die drei Terme mit dem m kann ich auch vereinfachen zu:

$$\frac{1}{3}\Big(-2am - 2bm - 2cm\Big) = -2m \cdot \frac{1}{3}(a + b + c) = -2mm = -2m^2\,.$$

Und der letzte Term in s^2 ergibt einfach m^2, also finde ich insgesamt **das Ergebnis**:

$$s^2 = \overline{x^2} - 2m^2 + m^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2\,.$$

Wenn du das Prinzip verstanden hast, siehst du leicht ein, dass diese Formel allgemein gilt: $s^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$. Also, berechnen von s^2 geht indem ich den Mittelwert der Quadrate ausrechne und davon das Quadrat des Mittelwerts abziehe. Vergleiche auch mit der Formel $\sigma^2 = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$. Die Herleitung ist ja eigentlich auch identisch.

Kumulative Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(1) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(2) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(3) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(4) „Berechne" für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(5) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(6) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(7) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(8) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(9) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle" eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(10) Formuliere die Regel von Horner!

(11) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(12) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(13) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(14) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben" bei Woche 4.

(15) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$,
(iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(16) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(17) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(18) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(19) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

(20) Finde die Funktionsvorschrift für die Tangente am Graphen von $f(x) = (x^2 - 2)^2$ an der Stelle $x = 1$.

(21) Untersuche das Monotonieverhalten von $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

(22) Zeige, dass die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 3x^2 + 8x$ keine Extremstellen hat.

(23) Finde die Wendestellen von $h(x) = x^4 - x^3 + x^2$.

(24) Finde $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = x^4 - 3x^2 + ax^2 + 3x + 5$ keine Wendestellen hat.

(25) Untersuche die Funktion $f(x) = x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Wendestellen, Extremstellen.

(26) Begründe, dass ein Polynom von Grad 10 höchstens 9 Extremstellen und höchstens 8 Wendestellen hat.

(27) Begründe, dass ein Polynom von Grad 7 mindestens eine Nullstelle hat.

(28) Finde einen Wert $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + ax^2 + 2x + 8$ kein Extremum hat.

(29) Zeige, dass die Funktionen $f(x) = -x^3 + ax^2 + b$ für alle $a.b \in \mathbb{R}$ einen Punkt haben, wo die Ableitung verschwindet. Zeige auch, dass wenn $a > 0$ es immer zwei Extremstellen gibt.

(30) Betrachte das ganz allgemeine kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit a, b, c, d reelle Zahlen und $a \neq 0$. Zeige (Begründe), dass jedes solches Polynom genau eine Wendestelle hat. (Hinweis: benutze dein Wissen zu linearen Funktionen mit Steigung k, die nicht Null sein darf.)

(31) Finde ein kubisches Polynom p, sodass p bei $x = 0$ eine Wendestelle hat, Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 4$ hat, und $p(1) = 1$.

(32) Finde ein quartisches Polynom p (also Grad 4), sodass $p(x) = p(-x)$, dass eine Wendestelle bei $x = \pm 2$ hat, $p(0) = 12$ und $p'(1) = -92$ erfüllt.

(33) Bestimme, wo die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ (monoton) fallend ist.

(34) Bestimme die Extremstellen der Funktion $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

(35) Differenziere die Funktion ... (siehe zB Arbeitsblatt Woche 21)

(36) Untersuche die Funktion ... auf Monotonie, Krümmung, Nullstellen, maximalen Definitionsbereich, ...

(37) Gegeben sind drei Punkte. Finde die Gleichung für den Kreis durch die drei Punkte.

(38) Gib die Gleichungen für eine Ellipse mit Halbachsen a und b, einen Kreis mit Radius r, eine Hyperbel.

(39) Gegeben ist die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 - 8x - 9y = 50$. Bestimme Radius und Mittelpunkt.

(40) Gegeben ist ein Kreis $x^2 + y^2 = 10$ und eine Gerade $x - 2y = 1$. Berechne die Schnittpunkte.

(41) Gegeben ist ein Kreis $x^2 + y^2 + 10$ und der Punkt $(8|5)$. Bestimme die Normalvektorform einer Geraden, die den Kreis berührt. Hinweise: Entweder arbeite mit Sinus und Cosinus und bestimme zuerst einen Berührungspunkt, oder, vielleicht einfacher: Eine Gerade durch den Punkt ist von der Form $(8|5) + t \cdot (1|a)$. Bestimme dann a, sodass nur ein Schnittpunkt mit dem Kreis existiert.