Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 4 (von 28.09 bis 02.10)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 01.10:
Erledige die Aufgaben die Menge an leichten Aufgaben zu $\mathbb{C}$ und fasse den Stoff zu $\mathbb{C}$ und den Wurzeln zu quadratischen Polynomen zusammen. Wenn du willst, darfst du mir eine Zusammenfassung zur Kontrolle abgeben.
Bis Freitag 02.10:
(i) Lerne die Grundkompetenzaufgaben 10.68 bis 10.72.
(ii) Zeige mittels Berechnung, dass $e^{i\pi} = -1$. (Benutze De Moivre)
(iii) Wie kann man mit dem Satz von De Moivre Wurzeln finden? Also, zB, wenn $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, wie finde ich eine komplexe Zahl w, sodass $w^2 = z$?
(iv) Was ist der Zusammenhang zwischen dem Grad einer algebraischen Gleichung und der Anzahl an Lösungen (in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$)? (Benutze S. 235 geschickt!)
Bis Dienstag 06.10:
Erledige und/oder studiere die Finanzmathematikaufgabe! Gib wenigstens die Probleme / Schwierigkeiten an!

Kernbegriffe dieser Woche:

Komplexe Zahlen. Die Zahl i. Betrag, komplex konjugierte Zahl, Gauß'sche Ebene.

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag (1. Std): HÜ-Bespr. und mSWH, (ii) Wiederholung Satz von De Moivre und Euler, (iii) eine Menge leichte Aufgaben zu $\mathbb{C}$ - siehe unten, (iv) Fragenrunde
- **(b)** Donnerstag (2. Std): HÜ-Bespr. und mSWH, (ii) Grundkompetenzen: 10.68 bis 10.72. (iii) Sei p ein Polynom in $\mathbb{R}$ von Grad n, dann hat die Gleichung p n Lösungen in $\mathbb{C}$ und falls z eine Lösung ist, dann auch $\overline{z}$.
- **(c)** Freitag (3. Std): HÜ-Bespr. (ii) Die Aufgaben von Seite 261 zu Komplexen Zahlen, (iii) eine Typ-2-Aufgabe; Thema Finanzmathematik!

Satz von De Moivre: Falls $z = r\cdot(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ mit r, α reell, dann $z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$. MaW: De Moivre sagt uns, dass Potenzen einer komplexen Zahl in Polardarstellung extrem leicht auszurechnen sind: Betrag potenzieren, Argument multiplizieren.
Satz von Euler: Falls $z = a + bi$, mit a, b reell, dann $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i\sin(b))$, sodass also $|e^z| = e^a$ und $\mathrm{Arg}(z) = b$. Im Besonderen $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ (nimm $a = 0$, sodass $e^a = 1$). Aber auch $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben

Zerlege in linearen Faktoren $x^2 - x + 10$	Schreibe als $a + bi$: $(6 - i)^{-1}$	Schreibe in Polarform $7 - 3i$
Finde alle Lösungen zu $3x^2 - 6x + 5 = 0$	$\mathrm{Arg}(5 - 7i) =$	$\mathrm{Im}(\frac{2-i}{3+5i}) =$
Was ist die Gauß'sche Ebene?	Wie viele Nullstellen hat $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x + 9$ höchstens?	Was besagt der Satz von De Moivre?
Eine Wurzel von einem quadratischen Polynom mit reellen Koeffizienten ist $-2+i\sqrt{5}$. Was ist die andere Wurzel?	Finde ein quadratisches Polynom, sodass $x = 2 + 3i$ eine Wurzel ist.	$e^{\pi i/2} = \ldots$
In welchem Sinne ist $\mathbb{C}$ eine Erweiterung von $\mathbb{R}$?	Finde den reellen Teil von $z = 9(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}))$.	Ein reelles quadratisches Polynom p hat nur eine Wurzel, und zwar bei $x = 2$. Gib einen möglichen Term für p.
Beweise, dass $z\overline{z} = \|z\|^2$. Hinweis: nimm $z = a + bi$.	Finde $\|z\|$, wenn $z = 3 + 7i$	Finde den Betrag von $z = \frac{7-2i}{3+4i}$.
Beweise, dass $\|z\|$ zum üblichen Betrag reduziert, falls z reell ist.	Finde z mit $z^5 = -1$. (Hinweis: De Moivre)	Welche geometrische Operation korrespondiert mit „Mit i Multiplizieren“?

Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(a) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(b) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(c) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(d) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(e) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(f) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(g) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(h) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(i) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(j) Formuliere die Regel von Horner!

(k) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(l) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(m) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

sSWH zu Algebra & i

Frage 1. Zerlege in lineare Faktoren x^2-3x+7. Man findet für die Gleichung $x^2-3x+7=0$, dass die Lösungen sind: $x=\frac{3}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{19}$. Darum ist also $x^2-3x+7=(x-\frac{3}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{19})(x-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{19})$

Frage 2. Schreibe als $a+bi$: $\frac{2-3i}{8+5i}$. Empfohlene Strategie: $\frac{2-3i}{8+5i}\cdot\frac{8-5i}{8-5i}=\frac{1-14i}{8^2+5^2}=\frac{1}{89}-\frac{14}{89}i$

Frage 3. Berechne den Betrag und das Argument von $z=1+i$. Betrag $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Argument: $\tan(\alpha)=\frac{1}{1}=1$, also $\alpha=\frac{\pi}{4}$ oder 45 Grad.

Frage 4. Zeige, dass $z=-1+i\sqrt{3}$ die Gleichung $z^3=8$ erfüllt. Ausmultiplizieren $z^2=1-3-2i\sqrt{3}=-2-2i\sqrt{3}$ und also $z^3=z^2\cdot z=-2(1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})=-2\cdot(-1-3)=-8$

BONUS: Kannst du mit 4 alle drei Lösungen von $z^3=8$ finden? Da $z=2$ auch eine Lösung ist, fehlt dann als dritte Wurzel nur noch die komplex konjugierte Zahl zu $-1+i\sqrt{3}=-1-i\sqrt{3}$. Daher $z^3-8=(z-2)(z+1+i\sqrt{3})(z+1+-\sqrt{3})$.

sSWH zu Algebra & i

Frage 1. Zerlege in lineare Faktoren x^2+2x+7. Man findet für die Gleichung $x^2+2x+7=0$, dass die Lösungen sind: $x=-1\pm\frac{i}{2}\sqrt{24}=-1\pm i\sqrt{6}$. Daher $x^2+2x+7=(x+1+i\sqrt{6})(x+1-i\sqrt{6})$.

Frage 2. Schreibe als $a+bi$: $\frac{2+3i}{8-5i}$. Man findet $\frac{2+3i}{8-5i}\cdot\frac{8+5i}{8+5i}=\frac{1+14i}{8^2+5^2}=\frac{1}{89}+\frac{14}{89}i$.

Frage 3. Berechne den Betrag und das Argument von $z=2-2i$. Betrag $|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. Argument: $\tan(\alpha)=-\frac{2}{2}=-1$, also $\alpha=-\frac{\pi}{4}$, oder -45 Grad.

Frage 4. Zeige, dass $z=-1-i\sqrt{3}$ die Gleichung $z^3=8$ erfüllt. $z^2=-2+2i\sqrt{3}=-2(1-i\sqrt{3})$, also $z^3=-2(1-i\sqrt{3})\cdot(-1-i\sqrt{3})=-2(-3-1)=8$.

BONUS: Kannst du mit 4 alle drei Lösungen von $z^3=8$ finden? Komplex konjugiert zu $-1-i\sqrt{3}$ ist $-1+i\sqrt{3}$, welches also auch eine Lösung sein muss, und eine leicht zu findene Lösung ist die Zahl 2.