Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 6 (von 12.10 bis 16.10)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 15.10:
Erledige und/oder studiere die Aufgaben 2.05, 2.06, 2.07, 2.08(a)(b)(e), 2.09(a)(e), 2.10(a)(b) und 2.14.
Und: **Habe ich von euch schon das Kopiergeld bekommen?**
Bis Freitag 16.10:
Lerne / Erledige Aufgabe 2.15(2), 2.16(b), 2.19, 2.22(a), 2.26, 2.27(a)
Bis Dienstag 20.10:
(i) Lerne / erledige die Aufgaben 2.28(a), 2.30(1), 2.33, 2.34, 2.36(1)(3), 2.40.
(ii) Gegeben ist $f(x) = 3x^2$. Finde $a \in \mathbb{R}^+$, sodass der Neigungswinkel der Tangente 80 Grad beträgt. (Hinweis: $\tan^{-1}$.)

Kernbegriffe dieser Woche:

Differenzieren, Zunahme, Zunahmerate, Sekante, Tangente, Steigung, Differenzenquotient, Neigungswinkel

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag (1. Std): HÜ-Bespr. und sSWH zu $\mathbb{C}$, (ii) 2.05, 2.06, 2.07, 2.08(a)(b)(e), 2.09(a)(e), 2.10(a)(b) und 2.14.
- **(b)** Donnerstag (2. Std): HÜ-Bespr., (ii) Seite 18 und 19 erklären: Differenzenquotient, (iii) 2.15(2), 2.16(b), 2.19, 2.22(a), 2.26, 2.27(a)
- **(c)** Freitag (3. Std): HÜ-Bespr. und mSWH (Differenzieren, S.13-20) (ii) 2.28(a), 2.30(1), 2.33, 2.34, (iii) Neigungswinkel $f'(x) = \tan(\alpha)$: 2.36(1)(3), danach 2.40

Differenzenquotien: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Satz von De Moivre: Falls $z = r \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ mit r, α reell, dann $z^n = r^n \cdot (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$. MaW: De Moivre sagt uns, dass Potenzen einer komplexen Zahl in Polardarstellung extrem leicht auszurechnen sind: Betrag potenzieren, Argument multiplizieren.
Satz von Euler: Falls $z = a + bi$, mit a, b reell, dann $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos(b) + i\sin(b))$, sodass also $|e^z| = e^a$ und $\mathrm{Arg}(z) = b$.
Regel von Horner: $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$.
1. Differenzierregel: Wenn $f(x) = a \cdot x^n$, dann $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(a) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(b) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(c) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(d) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(e) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(f) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(g) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(h) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(i) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(j) Formuliere die Regel von Horner!

(k) Vereinfache $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ und $\frac{x^4 - y^8}{x - y^2}$.

(l) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(m) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(n) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(o) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$, (iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

sSWH zu $\mathbb{C}$

Frage 1. Drücke $z = e^{\pi + \frac{\pi}{2} i}$ in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ aus und finde den reellen Teil von z.

$z = e^{\pi} \cdot (\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)) = e^{\pi} \cdot (0 + i \cdot 1) = ie^{\pi}$. der reelle Teil ist somit 0.

Frage 2. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Grad eines Polynoms, der Anzahl der komplexen Nullstellen und der Zerlegung in linearen Faktoren? Sei möglichst vollständig!

Jedes Polynom von Grad n kann man in $\mathbb{C}$ in n linearen Faktoren zerlegen. Daher gibt es höchstens n Nullstellen (evt. komplex), denn einige können zusammenfallen.

Frage 3. Finde das Argument von $w = \frac{1+2i}{2-i}$.

Man findet $w = i$, also das Argument ist $\pi/2$, bzw. 90 Grad.

Frage 4. Interpretiere die Menge $\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 2\}$ geometrisch und zeichne (skizziere) sie in die Gauß'schen Zahlenebene ein!

Kreis mit Radius 2 und Mittelpunkt i.

sSWH zu $\mathbb{C}$

Frage 1. Drücke $z = e^{2\pi - \frac{\pi}{2} i}$ in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ aus und finde den reellen Teil von z.

$e^{2\pi} \cdot (\cos(-\pi/2) + i \sin(-\pi/2)) = e^{2\pi} \cdot (0 + i \cdot -2) = -ie^{2\pi}$. der reelle Teil ist somit 0.

Frage 2. Formuliere den Satz von Euler! Sei vollständig!

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $e^{a+bi} = e^{a} \cdot (\cos(b) + i \sin(b))$.

Frage 3. Finde das Argument von $w = \frac{1-2i}{2+i}$.

Man findet, dass $w = -i$, also Arg(w)$= -\pi/2$, bzw. -90 Grad.

Frage 4. Interpretiere die Menge $\mathcal{N} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = 1\}$ geometrisch und zeichne (skizziere) sie in die Gauß'schen Zahlenebene ein!

Kreis mit Radius 1 um $-i$.