Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 7 (von 19.10 bis 23.10)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 22.10:
Lerne bzw. erledige 2.28(a), 2.30(1), 2.33, 2.34, 2.36(1)(3), 2.40.
Bis Freitag 23.10:
(i) Erledige das Arbeitsblatt!
(ii) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Berechne $f'(x)$ und finde den Punkt / die Punkte, wo die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.
Bis Dienstag 27.10:
(i) Lerne und / oder erledige die Aufgaben 2.44(a), 2.45(a), 2.47, 2.49, 2.50, 2.57.
(ii) Bereite die Aufgaben 2.55(a)(b)(c), 2.56(a)(b), 2.71 und 2.75 gut vor!

Kernbegriffe dieser Woche:

Differenzieren, Zunahme, Zunahmerate, Sekante, Tangente, Steigung, Differenzenquotient, Neigungswinkel

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag (1. Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) Für manche gibt es einen Reparaturauftrag, für die anderen ein Arbeitsblatt – siehe unten. (iii) Dann von Freitag das, was noch zu erledigen ist: 2.28(a), 2.30(1), 2.33, 2.34, 2.36(1)(3), danach 2.40
- **(b)** Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) kurze Besprechung zum Arbeitsblatt (iii) Leibniz-Notation : 2.44(a), 2.45(a) und 2.47, (iv) 2.49 und 2.50
- **(c)** Freitag (3. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) endgültige Besprechung des Arbeitsblatts, (iii) Aufgaben 2.57, 2.71 und 2.75

Differenzenquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Differentialquotient: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Regel von Horner: $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$.
1. Differenzierregel: Wenn $f(x) = a \cdot x^n$, dann $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(a) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(b) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(c) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(d) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(e) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(f) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(g) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(h) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(i) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(j) Formuliere die Regel von Horner!

(k) Vereinfache $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ und $\frac{x^4 - y^8}{x - y^2}$.

(l) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(m) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(n) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(o) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$, (iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(p) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(q) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(r) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(s) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

sSWH zu $\mathbb{C}$ Gruppe A

Frage 1. Gegeben $|z| = r$, $\mathrm{Arg}(z) = \alpha$, $|w| = s$ und $\mathrm{Arg}(w) = \beta$. Was ist das Argument von $z \cdot w$? (Bonus: Was ist das Argument von $\frac{z}{w}$?)

$\mathrm{Arg}(zw) = \alpha + \beta$. Bonus: $\mathrm{Arg}(z/w) = \alpha - \beta$.

Frage 2. In welchem Sinne ist $\mathbb{C}$ eine Erweiterung von $\mathbb{R}$? Sei möglichst vollständig!

Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl, also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Wenn wir die Rechenregeln für komplexe Zahlen auf reelle Zahlen anwenden, bekommen wir die normalen Rechenregeln für reelle Zahlen. Auch ist der Betrag in $\mathbb{C}$ auf eine reelle Zahl angewandt wieder der normale Betrag für reelle Zahlen. Also, alle Rechenoperationen sind gute Erweiterungen. Die neue Möglichkeit ist dass ALLE POLYNOME IN LINEARFAKTOREN ZERLEGT WERDEN KÖNNEN.

Frage 3. Finde den reellen Teil der komplexen Zahl $\frac{5-i}{5+i}$.

$\mathrm{Re}(\frac{5-i}{5+i}) = \mathrm{Re}(\frac{24-10i}{26}) = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$.

Frage 4. Wenn $5 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms von Grad 2 ist, was ist dann die andere Nullstelle? Gib auch einen möchligen Term für dieses Polynom!

Andere Nullstelle ist dann $5-4i$. Möglicher Term ist somit $(x-5-4i)(x-5+4i) = (x-5)^2+16 = x^2 - 10x + 41$.

sSWH zu $\mathbb{C}$ Gruppe B

Frage 1. Gegeben $|z| = r$, $\mathrm{Arg}(z) = \alpha$, $|w| = s$ und $\mathrm{Arg}(w) = \beta$. Was ist der Betrag von $z \cdot w$? (Bonus: Was ist der Betrag von $\frac{z}{w}$?)

$|zw| = rs$ und $|z/w| = r/s$.

Frage 2. In welchem Sinne ist $\mathbb{C}$ eine Erweiterung von $\mathbb{R}$? Sei möglichst vollständig!

Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl, also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Wenn wir die Rechenregeln für komplexe Zahlen auf reelle Zahlen anwenden, bekommen wir die normalen Rechenregeln für reelle Zahlen. Auch ist der Betrag in $\mathbb{C}$ auf eine reelle Zahl angewandt wieder der normale Betrag für reelle Zahlen. Also, alle Rechenoperationen sind gute Erweiterungen. Die neue Möglichkeit ist dass ALLE POLYNOME IN LINEARFAKTOREN ZERLEGT WERDEN KÖNNEN.

Frage 3. Finde den reellen Teil der komplexen Zahl $\frac{4-i}{4+i}$.

$\mathrm{Re}(\frac{4-i}{4+i}) = \mathrm{Re}(\frac{15-8i}{17}) = \frac{15}{17}$.

Frage 4. Wenn $4 + 5i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms von Grad 2 ist, was ist dann die andere Nullstelle? Gib auch einen möchligen Term für dieses Polynom!

Die andere Nullstelle ist dann $4 - 5i$. Somit ist ein möglicher Term $(x - 4 - 5i)(x - 4 + 5i) = (x - 4)^2 + 25 = x^2 - 8x + 41$.

Differenzieren – Aufgaben zum Festigen und zum Lernen

A1. Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r ist durch die Funktion $A(r) = \pi r^2$ gegeben. (a) Um wie viel nimmt der Flächeninhalt zu, wenn der Radius von $r = 4$ auf $r = 5$ wächst? (b) Um wie viel Prozent nimmt der Flächeninhalt zu, wenn r von 10 auf 12 wächst? (c) Gib einen Termausdruck für die mittlere Steigung von $A(r)$ auf dem Intervall $[r; r + h]$. (d) Finde $A'(r)$ und interpretiere das Ergebnis!

A2. Der Quotient $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ kann auch wie folgt benutzt werden: $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x$. (a) Warum gilt die vorher gezeigte Gleichung? (b) Interpretiere folgende Aussage: *Der Differenzenquotient ist der Quotient, mit dem man eine Länge eines Intervalls multiplizieren muss, um auf die Änderung der Funktion zu kommen.* (c) Für welche Funktionen ist Δf direkt proportional zu Δx?

A3. Wir betrachten zwei einfache Funktionen: $f(x) = 3x$ und $g(x) = 4x^2$. (a) Zeige anhand des Beispiels, dass der Differenzenquotient von $h = g + f$ die Summe der Differenzenquotienten von f und g ist. (b) Benutze (a) um zu begründen, dass die Steigung der Tangente am Graphen von $h = g + f$ die Summe der Steigungen der jeweiligen Tangenten von f und g ist. (c) Kannst du auf eine allgemeine Regel für $(f + g)'$ schließen?

A4. Benutze dein Wissen von A3 um die Ableitungen der folgenden Funktionen zu finden: (a) $f(x) = 4x^2 + 5x$, (b) $g(x) = 3x^3 + \frac{x^2}{2}$, (c) $h(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6}$.

A5. Die Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + 3$ haben dieselbe Ableitung. (a) Zeige dies! (b) Bei welchen Funktionen hat die Sekante immer Steigung Null? (c) Ergänze! *Falls für zwei Funktionen f und g gilt, dass $f' = g'$, dann ist $f - g$ eine* ____________________ *Funktion.*

A6. *Der Graph der Funktion $f(x) = 2x^3$ verläuft zweimal so steil wie der Graph der Funktion $g(x) = x^3$.* (a) Erkläre, was mit der Aussage gemeint ist, und gib einen Zusammenhang zwischen Δf und Δg an! (b) Was bedeutet das Ergebnis von (a) für eine Beziehung zwischen $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta g}{\Delta x}$? (c) Finde einen Zusammenhang zwischen $f'(x)$ und $g'(x)$? (d) Kannst du auf eine allgemeine Regel für einen Zusammenhang zwischen $f'(x)$ und der Ableitung von $h = a \cdot f$ für $a \in \mathbb{R}$ schließen? Hinweis: Wenn $h(x) = a \cdot f(x)$, dann gilt $h'(x) = \ldots$.

Wichtiges Wissen

(a) Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$

(b) Skalarmultiplikationsregel $(a \cdot f)' = a \cdot f'$

(c) Falls $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $f(x) = x^k$, dann $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

(d) Beispiele zu (c): $f(x) = x = x^1$, dann $f'(x) = 1$;

wenn $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, dann $f'(x) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$.