Planungsblatt Mathematik für die 7A

Woche 8 (von 26.10 bis 30.10)

Hausaufgaben [1]

Donnerstag 29.10:
Lerne bzw. erledige die Aufgaben 2.50, 2.57, 2.55(c), 2.61, 2.66(a), 2.69, 2.78, 2.82.
Bis Freitag 30.10:
Die Freitagsstunde fällt aus, weil die 8. Klasse eine Schularbeit hat, und dies erfordert meine Anwesenheit. Ich empfehle euch aber, die Aufgaben 2.114 bis 2.126 zu studieren: suche dir mindestens eine Ankreuz- und eine Textaufgabe aus, und studiere sie richtig! Bei der SA gehe ich davon aus, dass ich solche Aufgaben aufgeben kann.
Bis Dienstag 03.11:
Schulfrei!

Kernbegriffe dieser Woche:

Differenzieren, Zunahme, Zunahmerate, Sekante, Tangente, Steigung, Differenzenquotient, Neigungswinkel, mehrfache Ableitungen

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- **(a)** Dienstag (1. Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) 2.57, 2.55(c), 2.61, 2.66(a), 2.69, 2.78, 2.82, (iii) SA-Stoff besprechen (iv) Seite 32 aufgeben und mehrfache Ableitungen
- **(b)** Donnerstag (2. Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Definition von $f^{(k)}$ und Zusammenhang mit Grad für Polynome, (iii) einige Aufgaben zu AG 2.1-2.5 aus Maturatraining (dieses Buch empfehle ich euch!), (iv) Grundkompetenzen auf euch verteilen – siehe auch SA-Stoff; in der kommenden Woche werdet ihr diese GK vorstellen, kurz erklären, ein Hand-Out dazu machen und eine Beispielaufgabe dazu vorstellen (selbst erstellen), (v) 2.112, 2.113, (2.114 und 2.115 selbst), 2.116, 2.121, 2.123 und 2.124
- **(c)** Freitag (3. Std): Diese Stunde wird suppliert: Mache aber Aufgaben aus der folgenden Menge: Seite 32 und 2.114 bis 2.126: suche dir die Aufgaben geschickt aus! Nicht nur die einfachsten Aufgaben aussuchen, oder nach der Reihe arbeiten, stelle dir selbst ein Menü zusammen!

Differenzenquotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Differentialquotient: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Regel von Horner: $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$.
1. Differenzierregel: Wenn $f(x) = a \cdot x^n$, dann $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$.
Mehrfache Ableitung: zweite Ableitung f'' ist die Ableitung der Ableitung. Wenn f ein Polynom von Grad n ist, dann ist die k. Ableitung $f^{(k)}$ ein Polynom von Grad $n-k$, also $f^{(n+1)} = 0$.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Fragenkatalog für SWH – exemplarische Aufgaben, nicht ausschöpfend!

(a) Zerlege in lineare Faktoren $p(x) = x^2 - 3x + 12$; $q(x) = 2x^2 - x - 1$.

(b) Gib ein Polynom dritten Grades mit den folgenden Nullstellen $x = -3$, $x = -2$ und $x = 4$.

(c) Skizziere den Graphen einer kubischen Polynomfunktion mit ZWEI Nullstellen.

(d) „Berechne“ für $z = 2 + i$ und $w = 3 + 2i$: $\frac{z}{w}$, $(2z - 3w)^2$, $2z + 5w$, zw, $\overline{z}w$ und $\overline{z - w}$.

(e) Was ist der Betrag einer komplexen Zahl? Deute ihn geometrisch!

(f) Zerlege in lineare Faktoren $x^2 - x + 7 = 0$.

(g) Beweise, dass wenn $z \neq 0$ eine komplexe Zahl ist, dass $z\overline{z} > 0$.

(h) Zeige, dass wenn die zwei Nullstellen von $p = x^2 + 3x + 10$ zu einander komplex konjugiert sind. Kannst du dies verallgemeinern?

(i) Wenn $2 + 4i$ die „Nullstelle“ eines reellen Polynoms ist, was ist dann die andere Nullstelle?

(j) Formuliere die Regel von Horner!

(k) Vereinfache $\frac{x^4-y^4}{x-y}$ und $\frac{x^4-y^8}{x-y^2}$.

(l) Berechne den Betrag von $z = 3 - 4i$, $w = \frac{1}{1-i}$ und von zw.

(m) Zeige, dass $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ die Gleichung $z^3 = 1$ erfüllt. Kannst du damit alle Lösungen zu $z^3 = 1$ finden?

(n) Siehe alle Fragen von „Elementares zu $\mathbb{C}$ – eine Menge leichte Aufgaben“ bei Woche 4.

(o) Finde die Steigung der Sekante durch $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ für (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = c \cdot x^2$, (iii) $f(x) = c \cdot x^4$, (iv) $f(x) = k \cdot x + d$.

(p) Finde die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = 3x^2$ im Punkt $(2|12)$.

(q) Drücke die Steigung der Tangente am Graphen von $f(x) = ax^3$ im Punkt $(2|8a)$ in a aus.

(r) Was ist Differenzieren? Drücke in Worten aus!

(s) Erkläre den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten!

eine kleine $\mathbb{C}$-Prüfung

Mache mindestens 4 Aufgaben richtig!
Aufgabe 1. Finde das Argument von $z = e^{2+3i}$. 3, denn $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ wobei α das Argument ist. Somit ist das Argument von e^{a+bi} (wobei $a, b \in \mathbb{R}$) genau b, also hier 3.
Aufgabe 2. Gib den Betrag von $\frac{4+2i}{3+5i}$. Man findet, dass diese komplexe Zahl ist: $\frac{22}{34} - i\frac{14}{34}$, also ist der Betrag $\sqrt{\left(\frac{22}{34}\right)^2 + \left(\frac{14}{34}\right)^2} = \frac{1}{34}\sqrt{22^2 + 14^4} = \ldots$
Aufgabe 3. Erkläre die Begriffe vollständig: imaginärer Teil und reeller Teil (einer komplexen Zahl). Wenn man eine komplexe Zahl schreibt als $z = a + bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist a der reelle Teil von z und b der imaginäre Teil von z.
Aufgabe 4. Ein reelles quadratisches Polynom hat eine komplexe Wurzel $2-3i$. Gib die andere Wurzel und finde einen möglichen Term für das Polynom. Die andere Wurzel ist $2+3i$, somit ist ein Term $(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-2)^2 + 9 = x^2 - 4x + 13$.
Aufgabe 5. Gib die Linearfaktorzerlegung von $x^2 + 2x + 5$. Ich finde $(x+1-2i)(x+1+2i)$.
Aufgabe 6. Finde den imaginären Teil der komplexen Zahl z, wenn gegeben ist $|z| = 1$ und $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$. Also $z = 1(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$. Daher ist der imaginäre Teil $\sin(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,7$.
Aufgabe 7. Wie kann man komplexe Zahlen mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren? Wie funktioniert dann die Addition zweier komplexen Zahlen? Indem man $z = a+bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit dem Vektor $(a|b)$ identifiziert. Die Addition ist dann die übliche Vektoraddition, also komponentweise.
Aufgabe 8. Gegeben ist $|z| = 2$ und $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{8}$. Für welche Potenzen z^n von z ist der reelle Teil 0? M.a.W., finde (alle) n, sodass z^n *imaginär* ist. Damit der reelle Teil Null ist, muss das Argument entweder 90 Grad, also $\pi/2$ oder 270 Grad sein, also $3\pi/2$. Im ersten Fall findet man $n = 4, 20, 36, 52, \ldots$ und im zweiten Fall $n = 12, 28, 44, \ldots$, also $4 + k \cdot 8$ mit k eine ganze Zahl.
Aufgabe 9. Finde $z \in \mathbb{C}$, sodass $z^3 = i$. Hinweis: Polardarstellung. Ansatz: $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, dann $z^3 = r^3(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha))$, dies muss i sein, und $i = 1 \cdot (0 + i\sin(90^o))$. Daher $r^3 = 1$ und wir können $\alpha = 30^o$ wählen. Somit $z = \cos(30^o) + i\sin(30^0) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{i}{2}$ ist eine Möglichkeit.
Aufgabe 10. Wie findet man den Betrag einer komplexen Zahl? Benutze die Polardarstellung und die kartesische Darstellung! Welche geometrische Interpretation hat der Betrag einer komplexen Zahl? Wie interpretiert man $|z-w|$ geometrisch? Der Betrag von $z = a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ und es gilt $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Der Betrag ist die Distanz zu Null (Ursprung) in der Gauß'schen Ebene. $|z-w|$ korrespondiert dann mit der Distanz zwischen z und w.

eine kleine $\mathbb{C}$-Prüfung

Mache mindestens 4 Aufgaben richtig!
Aufgabe 1. Finde das Argument von $z = e^{3+2i}$. Siehe oben: 2.
Aufgabe 2. Gib den Betrag von $\frac{4+3i}{3-5i}$. Wie oben, nur jetzt ist diese komplexe Zahl $\frac{-3+29i}{34}$, sodass der Betrag $\frac{1}{34}\sqrt{3^2+29^2}$ ist.
Aufgabe 3. Erkläre die Begriffe vollständig: imaginärer Teil und reeller Teil (einer komplexen Zahl). Siehe oben.
Aufgabe 4. Ein reelles quadratisches Polynom hat eine komplexe Wurzel $5-3i$. Gib die andere Wurzel und finde einen möglichen Term für das Polynom. Andere Wurzel $5+3i$. Ein Term wäre somit $(x-5-3i)(x-5+3i) = (x-5)^2+9 = x^2-10x+34$.
Aufgabe 5. Gib die Linearfaktorzerlegung von x^2+5x+7. $(x+\frac{5}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3})(x+\frac{5}{2}-i\frac{1}{2}\sqrt{3})$.
Aufgabe 6. Finde den imaginären Teil der komplexen Zahl z, wenn gegeben ist $|z| = 1$ und $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$. $z = 1\cdot(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$. Der imaginäre Teil ist somit $\sin(\pi/3) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Aufgabe 7. Wie kann man komplexe Zahlen mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren? Wie funktioniert dann die Addition zweier komplexen Zahlen? Siehe oben.
Aufgabe 8. Gegeben ist $|z| = 2$ und $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{6}$. Für welche Potenzen z^n von z ist der reelle Teil 0? M.a.W., finde (alle) n, sodass z^n *imaginär* ist. Strategie wie oben: $n = 3, 9, 15, 21, 27, \ldots$, also $n = 3+6k$ mit k eine ganze Zahl.
Aufgabe 9. Finde $z \in \mathbb{C}$, sodass $z^4 = i$. Hinweis: Polardarstellung. (Siehe auch oben.) Das Argument muss also ein Viertel von $\pi/2$ sein, da das Argument von i genau $\pi/2$ ist. Somit ist $z = \cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)$ eine Möglichkeit,
Aufgabe 10. Wie findet man den Betrag einer komplexen Zahl? Benutze die Polardarstellung und die kartesische Darstellung! Welche geometrische Interpretation hat der Betrag einer komplexen Zahl? Wie interpretiert man $|z-w|$ geometrisch? Siehe oben.

Schularbeitsstoff für die SA am 12. November

- Grundkompetenzen: (a) Von AG: alle! (b) FA: 2.1 bis 2.6, (c) AN: 1.1 bis 1.3, (d) AN 2.1: wissen dass $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ und $(f + g)' = f' + g'$.
- Komplexe Zahlen wird ein Thema sein. Einige Begriffe dazu: reeller Teil, imaginärer Teil, $\mathbb{C}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$, Gauß'sche Ebene und die Korrespondenz zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$, Betrag, Argument, Rechenoperationen, Satz von Euler, Satz von De Moivre, Polardarstellung, Wurzeln von Polynomen mit reellen Koeffizienten.
- Differenzieren ist auch ein Thema. Einige Begriffe dazu: Differenzenquotient, Differenztialquotient, Steigung, Sekante, Tangente, Ableitung, Leibniz-Notation, Newton-Notation, Neigungswinkel, Steigungsdreieck, Ableitungen von Polynomen und von Potenzfunktionen $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, Regeln wie $(f+g)' = f'+g'$; $(kf)' = kf'$ mit $k \in \mathbb{R}$; $\Delta f \approx f'\Delta x$ wenn Δx klein genug.
- Die Aufgaben aus Kapitel 10, die wir gemacht haben. Alle Aufgaben aus Kapitel 2.Wissen über quadratische Gleichungen. Wissen, dass ein Polynom von Grad n höchstens n reelle Nullstellen hat. Linearfaktoren und die Zerlegung in sie. Regel von Horner und ihre Anwendung fürs Differenzieren.
- Mehrfache Ableitungen: Wissen, dass die zweite Ableitung die Ableitung der Ableitung ist; Für Polynome f von Grad n wissen, dass die $f^{(k)}$ ein Polynom von Grad $n - k$ ist.
- Die Aufgaben aus Kapitel 3, die wir (bis zur SA) gemacht haben.
- Funktionen die du gut kennen musst: Lineare Funktionen, Indirekte Proportionalitäten, Sinus, Tangens und Cosinus in wie weit sie für komplexe Zahlen sinnvoll sind: also die Definitionen in rechtwinkligen Dreiecken und ihre Periodizität. Bogenmaß oder Grad sollten für dich keine Probleme darstellen.