Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 8D WIKU am 16.03.2016

KORREKTURVERSION
für Bilder usw. siehe die SA selbst

Mit einem Dank an alle Kolleginnen und Kollegen, die bei dieser SA viel Arbeit geleistet haben!

Aufgabe 1. (2 Punkte) Eine Firma hat B Beschäftigte. Der Anteil der männlichen Angestellten liegt bei 70%. Und 40% aller männlicher Mitarbeiter dieses Betriebs rauchen.

Beschreiben Sie die Anzahl N der **männlichen Nichtraucher** dieser Firma mit Hilfe eines geeigneten Terms:

Antwort: $N = 0,42B$

Aufgabe 2. (2 Punkte) Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.

Ordnen Sie jeder Lösungsmenge L die entsprechende quadratische Gleichung in der Menge der reellen Zahlen zu!

$L = \{0, \ \ 3\}$	B
$L = \emptyset = \{\,\}$	C
$L = \{3\}$	E
$L = \{-3, \ \ 3\}$	D

A	$(x+3)^2 = 0$
B	$x \cdot (x-3) = 0$
C	$-x^2 = 9$
D	$x^2 - 9 = 0$
E	$x^2 - 6x + 9 = 0$
F	$(x-3)^2 = 16$

Aufgabe 3. (2 Punkte) Betrachten Sie die Gerade g, die durch folgende **Parameterdarstellung** definiert ist:

$$g: \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

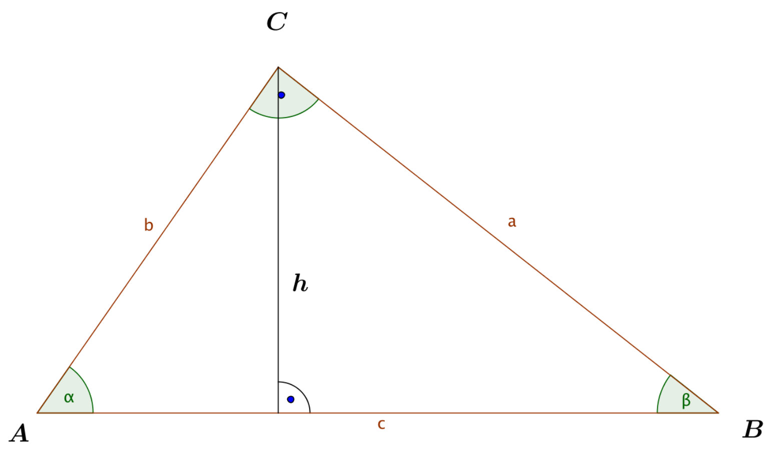
Finden Sie einen Normalvektor zur Geraden g und benutzen Sie diesen, um eine **Gleichung** (Normalvektorform) für eine Gerade h aufzustellen, die (1) parallel zu g ist und (2) durch den Punkt $P = (2|0)$ geht.

Normalvektor zu g: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gleichung für h: $3x - y = 6$

Aufgabe 4. (2 Punkte) Verwenden Sie die gegebene Skizze eines **rechtwinkligen** Dreiecks $\triangle ABC$; $\angle BCA$ ist ein rechter Winkel, $AB = c$ und die Höhe von C auf AB ist eingezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

(1). $\sin\alpha = \frac{b}{h}$	☐
(2). $\tan\alpha = \frac{h}{c}$	☐
(3). $\sin\alpha = \frac{a}{c}$	☒
(4). $\cos\beta = \frac{a}{c}$	☒
(5). $\sin\beta = \frac{h}{a}$	☒



Aufgabe 5. (2 Punkte) Ein Rechteck hat einen Umfang von 20 Meter. Falls eine Seite des Rechtecks gegeben ist, ist der Flächeninhalt bestimmt. Es soll die Funktion A für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von einer Rechteckseite b aufgestellt werden.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Funktionsgleichungen an!

(1). $A(b) = b \cdot (20 - 2b)$	☐
(2). $A(b) = (10 - b) \cdot b$	☒
(3). $A(b) = (10 - b) \cdot 2b$	☐
(4). $A(b) = (20 - 2b) \cdot 0,5 \cdot b$	☒
(5). $A(b) = 10 - b \cdot b$	☐

Aufgabe 6. (2 Punkte) Für eine Funktion f gilt $f(0) = -2$ und $f'(0) = 3$.

Gib eine Funktionsgleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0|f(0))$ an!

$y = 3x - 2$

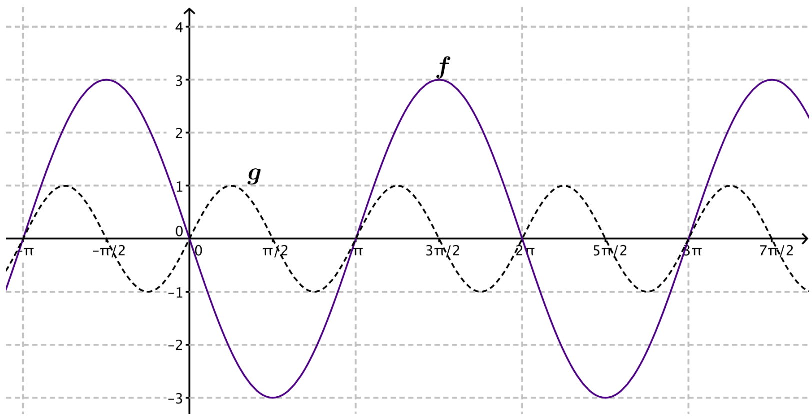
Aufgabe 7. (2 Punkte) Die folgenden Aussagen beschreiben Eigenschaften von Polynomfunktionen f mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in \mathbb{R}.$$

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Jede Polynomfunktion, die zwei lokale Extremstellen hat, ist mindestens von Grad drei.	$\boxtimes$
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	$\boxtimes$
Jede Polynomfunktion, die genau zwei Nullstellen hat, hat mindestens eine Extremstelle.	$\boxtimes$
Jede Polynomfunktion, deren Grad größer als 3 ist, hat mindestens eine lokale Extremstelle.	$\square$
Jede Polynomfunktion vierten Grades hat mindestens eine Nullstelle.	$\square$

Aufgabe 8. (2 Punkte) Gegeben sind die Graphen der periodischen Funktionen f und g.



Geben Sie die Funktionsterme von f und g an!

$f(x) = -3\sin(x)$, $\qquad g(x) = \sin(2x)$.

Aufgabe 9. (2 Punkte) Die Einwohnerzahl einer Stadt wird in folgenden Jahren gemessen:

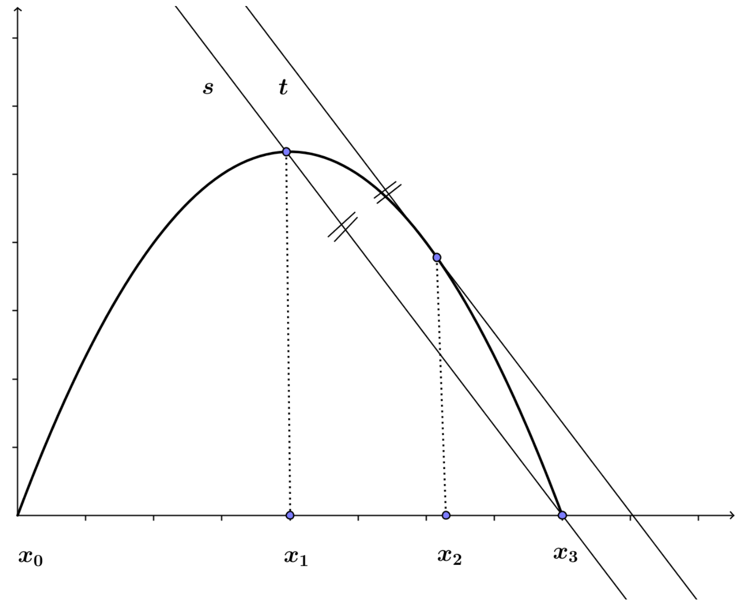
im Jahr 2000: 134.000 Einwohner,

im Jahr 2016: 178.000 Einwohner.

Der Bürgermeister will diesen Wachstumsvorgang durch eine Exponentialfunktion $E(t) = a \cdot b^t$ (t in Jahren ab 2000, $E(t)$ Anzahl der Einwohner) beschrieben sehen. Berechnen Sie a und b!

$a = 134.000, \qquad b = \sqrt[16]{\frac{178}{134}}$.

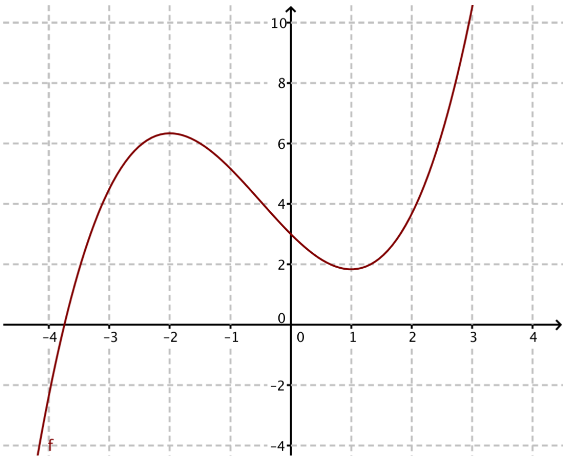
Aufgabe 10. (2 Punkte) Gegeben ist eine Polynomfunktion f zweiten Grades. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph dieser Funktion im Intervall $[0; x_3]$, sowie eine Sekante s und eine Tangente t dargestellt. Die Stellen x_0 und x_3 sind Nullstellen, x_1 ist eine lokale Extremstelle von f. Weiters ist die Tangente t parallel zur Sekante s.



Kreuzen Sie die <u>beiden</u> für die in der Figur abgebildeten Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f'(x_0) = f'(x_3)$	$\square$
$f'(x_0) = 0$	$\square$
$\dfrac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} > 0$	$\square$
$\dfrac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	$\boxtimes$
$f'(x_1) = 0$	$\boxtimes$

Aufgabe 11. (2 Punkte) In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[-4; 3]$ dargestellt.



Geben Sie das Intervall, beziehungsweise, diejenigen Stellen $x \in [-4; 3]$ an, für die gilt, dass die erste Ableitung (strikt) negativ ist; $f'(x) < 0$.

Antwort: Das Intervall $(-2; 1)$

Aufgabe 12. (2 Punkte) Gegeben ist eine Funktion s mit der Gleichung $s(t) = \frac{t^3}{6} + 5t^2 + 5t$. Die Funktion s beschreibt den von einem Körper zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit t. Die Funktion v gebe die Geschwindigkeit des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t an.

Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion v an!

$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 10t + 5$

Aufgabe 13. (2 Punkte) Bei einem Konsumententest werden zwei Arten von Tablet-Computern A und B verglichen. Beide Geräte werden von den Testern mit jeweils 0 bis 50 Punkten bewertet. In den hier links dargestellten Kastenschaubildern sind die Ergebnisse des Tests dargestellt.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

Die Ergebnisse von Tablet-Computer B streuen stärker als jene von A.	☐
Die erreichte Mindespunktezahl ist bei B höher als bei A.	☒
Ca. 50% der Befragten bewertete Marke A mit 30 bis 45 Punkten.	☒
Ca. 50% der Befragten bewertete Marke B mit 35 Punkten.	☐
Ca. 25% der Befragten bewertete Marke B mit höchstens 40 Punkten.	☐

Aufgabe 14. (2 Punkte) Eine Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 7$ und $\sigma = 1,5$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

$P(X \geq 6) < 0,5$	☐
$P(X \leq 7) = 0,5$	☒
$P(X \leq 8) > 0,5$	☒
$P(X > 9) = P(X < 5)$	☒
$P(X \leq 6) = P(X > 7)$	☐

Aufgabe 15. (2 Punkte) Es wird zehnmal mit einem ehrlichen, herkömmlichen Spielwürfel gewürfelt. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass höchstens zweimal die Augenzahl 6 gewürfelt wird. Kreuzen Sie den (einen) zutreffenden Term an!

$1 - \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	☐
$\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	☒
$\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$	☐
$\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	☐
$1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8\right)$	☐
$\binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	☐

Aufgabe 16. (2 Punkte) Für eine Abfolge von vier verschiedenen Bildern A, B, C und D gibt es nur eine richtige Reihung und zwar $ABCD$. Diese Bilder werden gemischt und, ohne sie anzusehen, in einer Reihe aufgelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P in Prozent, dass die richtige Reihenfolge erscheint.

$P = \frac{100}{24} \approx 4,2\ \%$

Aufgabe 17. (2 Punkte) Das Rauchverbot in Lokalen wird in Österreich sehr emotional diskutiert. Aufgrund von Umfragen weiß man, dass 62% ein Rauchverbot in Lokalen befürworten und 17% der Befürworter eines Rauchverbots in Lokalen selber Raucher sind. Insgesamt sind unter den Befragten 39,04% Raucher.

Gehen Sie davon aus, dass 10.000 Personen befragt wurden und füllen Sie dann die folgende Vierfeldertafel aus. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit P, dass ein willkürlich ausgewählter Gegner des Rauchverbots in Lokalen ein Raucher ist!

	Raucher	Nichtraucher	Summe
Befürworter	1054	5146	6200
Gegner	2850	950	3800
Summe	3904	6096	10.000

$P = \frac{2850}{3800} = \frac{3}{4} \rightarrow 75\%$

Aufgabe 18. (2 Punkte) Aufgrund einer umfangreichen Befragung veröffentlicht ein Meinungsforschungsinstitut vor einer Landtagswahl das 95%-Konfidenzintervall $[0,19; 0,24]$ für den relativen Wähleranteil der Partei X. Kreuzen Sie die <u>beiden</u> zutreffenden Aussagen an!

Der unbekannte relative Wähleranteil der Partei X liegt mit Sicherheit im Intervall $[0,19; 0,24]$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte relative Wähleranteil der Partei X außerhalb des Intervalls $[0,19; 0,24]$ liegt, ist kleiner als 1%.	☐
Ein 99%-Konfidenzintervall für den relativen Wähleranteil der Partei X wäre kleiner als das 95%-Konfidenzintervall gewesen.	☐
Hätte man die gleiche relative Häufigkeit der Wähler der Partei X in einer größeren Stichprobe erhalten, hätte sich ein kleineres 95%-Konfidenzintervall ergeben.	☒
Gibt man sich mit einem größeren 95%-Konfidenzintervall zufrieden, so hätte man weniger Personen befragen müssen.	☒

3. Schularbeit Mathematik am 16.03.2016

Klasse 8D WIKU

Teil 2

Korrekturversion

Aufgabe 1. (Insgesamt 7 Punkte)

Unter den Gesamtkosten eines Betriebes versteht man alle Ausgaben, die für die Produktion anfallen. Mit mathematischen Mitteln können die Kostenverläufe beschrieben werden, die für Betriebe strategische Entscheidungshilfen sind.

Die Gleichung der Gesamtkosten $K : [0; 100] \to \mathbb{R}$ eines bestimmten Produkts lautet

$$K(x) = 0,001x^3 - 0,09x^2 + 2,8x + 5$$

wobei x die produzierte Mengeneinheit (ME) ist und $x \in [0; 100]$.

(a) (1 Kompensationspunkt) Die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ beschreibe *die Gesamtkosten pro ME.*

Geben Sie eine Funktionsgleichung für $\overline{K}$ für das oben beschriebene Produkt an!

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,001x^2 - 0,09x + 2,8 + \frac{5}{x}$$

(b) (2 Punkte) Der Wert der Grenzkostenfunktion K' wird als Kostenzuwachs bei der Zunahme der Produktion um eine Mengeneinheit interpretiert, obwohl diese betriebswirtschaftliche Interpretation im Allgemeinen mathematisch nicht exakt ist.

• Geben Sie das mathematisch korrekte Änderungsmaß an, das der angestrebten betriebswirtschaftlichen Interpretation entspricht!

– Differenzenquotient.

• Für welche Art von Kostenfunktionen ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt? Geben Sie den Funktiontyp an!

– Lineare Funktionen.

(c) (2 Punkte) Pro verkaufter Mengeneinheit bekommt man 1,5 Geldeinheiten (GE); der Preis pro Mengeneinheit ist also unabhängig von x und beträgt 1,5 GE pro ME. Geben Sie einen Termausdruck für die Erlösfunktion $E(x)$ und berechnen Sie, in welchem Bereich man Gewinn macht!

– $E(x) = 1,5x$. Gewinn wird gemacht, wenn $1,5x > K(x)$. Dies ist eine kubische Ungleichung. Mit einem Graphen (GeoGebra/TR) lässt sich leicht das Intervall erruieren.

(d) (2 Punkte) Der Cournot'sche Punkt ist der Punkt, in dem der Gewinn maximal ist.

Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge x sich der Cournot'scher Punkt befindet!

– $G'(x) = 0$ ist zu lösen, also $E'(x) = K'(x)$, also $1,5 = 0,003x^2 - 0,18x + 2,8$. Dies ist eine quadratische Gleichung, also lösbar!

Aufgabe 2. (Insgesamt 8 Punkte)

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Polynomfunktion $f(x) = x^2 + px + q$.

(a) (3 Punkte) Lässt sich die Gleichung $x^2 + px + q$ in der Form $(x - z)(x - \frac{1}{z}) = 0$ mit $z \in \mathbb{R}^*$ schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

• Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z anhängen!

– Ausmultiplizieren: $x^2 - (z + \frac{1}{z})x + 1 = x^2 + px + q$, also $q = 1$ und $p = -z - \frac{1}{z}$.

• Bestimmen Sie die Werte von z, für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung hat und geben Sie für jeden dieser Werte von z jeweils die lokalen Extremstellen von f an!

– Die Lösungen von $(x - z)(x - \frac{1}{z}) = 0$ sind $x = z$ und $x = \frac{1}{z}$. In der Regel sind das zwei unterschiedliche Lösungen, außer, wenn $z = \frac{1}{z}$, also wenn $z = \pm 1$.

(b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert $q = -1$, dann erhält man eine Polynomfunktion zweiten Grades $f(x) = x^2 + px - 1$.

• **(1 Kompensationspunkt)** Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen haben muss!

– Diskriminante ist $D = p^2 + 4$ und das ist > 0 für alle p.

• (1 Punkt) Begründen Sie, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!

– Da es zwei Lösungen gibt, ist $x^2 + px - 1 = (x - u)(x - v)$ für zwei reelle Zahlen u und v, welche genau die Lösungen sind. (Linearfaktorzerlegung ist Nullstellen-Wissen!) Also $x^2 - (u + v)x + uv = x^2 + px - 1$ und somit muss $uv = -1$. Wenn das Produkt zweier Zahlen kleiner Null ist, ist eine positiv, die andere negativ.

(c) (3 Punkte) Für $q = p - \frac{1}{3}$ erhält man eine Funktion f mit $f(x) = x^2 + px + p - \frac{1}{3}$.

• Bestimmen Sie für diese Funktion f denjenigen Wert von p, sodass $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -6$.

– Berechnung ergibt $p = -3$.

• Geben Sie an, ob für dieses p die folgende Gleichheit gilt,

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

und begründen Sie Ihre Entscheidung!

– Einfach die linke Seite berechnen und die rechte danach auch, und du siehst, sie sind nicht gleich.

Aufgabe 3. (Insgesamt 9 Punkte)

Bei Messungen einer 70 km/h-Beschränkung auf einer Bundesstraße ergeben sich Geschwindigkeiten, die annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 79 km/h$ und $\sigma = 9 km/h$ sind.

(a) (2 Kompensationspunkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer auf dieser Bundesstraße eine Geschwindigkeit zwischen $85 km/h$ und $100 km/h$ hat?

– $P(85 < X < 100) = 24,27\%$

(b) (1 Punkt) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer auf dieser Bundesstraße mit einer Geschwindigkeit von mehr als 110 km/h fährt?

– Das sind etwa $\frac{110-79}{9} \approx 3\frac{4}{9}$ Standardabweichungen, also ist die Wahrscheinlichkeit so gut wie Null. Taschenrechner ergibt hier eine Zahl von etwa 0,03% bis 0,04%.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie ein symmetrisches Intervall um den Erwartungswert, in dem 90% der gemessenen Geschwindigkeiten liegen.

– Zu diesen 90% geört ein z-Wert von 1,645. Also ist die Antwort aus $79 \pm 1,645 \cdot 9$ zu bestimmen.

(d) (2 Punkte) Welchen Wert müsste eine (veränderte) Standardwabweichung σ (bei gleichbleibendem Erwartungswert μ) aufweisen, wenn die Wahrscheinlichkeit 0,96 ist, dass ein beliebig ausgewählter Autofahrer weniger als 82 km/h fährt?

$P(X > 82) = 0,96$. Somit muss 82 mit einem z-Wert von 1,751 korrespondieren, also $82 - 79 = 1,751 \cdot \sigma$ und dann weiß man σ.

(e) (2 Punkte) Man weiß auf Grund von den oben angegebenen Daten: 46% aller Autofahrer sind schneller als 80 km/h. In einer Aktion „Verkehrssicherheit jetzt!“ werden die Geschwindigkeiten von 500 Autofahrern gemessen.

Bestimmen Sie einen 95%-Schätzbereich an, wie hoch der Prozentanteil bei diesen Autofahrern ist, die schneller als 80 km/h fahren.

– Anteil: 0,46. Und $z = 1,96$, also $\Delta = 1,96\sqrt{\frac{0,46 \cdot 0,54}{500}}$ und das Intervall findet man dann mittels $0,46 \pm \Delta$.

Aufgabe 4. (Insgesamt 6 Punkte)

Bei bestimmten Tierarten entscheidet die Temperatur der Umgebung der Eier, ob aus den Eiern ein Männchen oder ein Weibchen schlüpft. Ein Arzt möchte wissen, ob bei Menschen das Rauchen eine Geburt eines Buben wahrscheinlicher macht, m.a.W. begünstigt.

(a) Der Arzt macht eine Stichprobe unter 800 Neugeborenen, von denen die Mutter vor und während der Schwangerschaft geraucht hat.

(2 Kompensationspunkte) Ergänzen Sie durch ankreuzen so, dass ein mathematisch korrekter Satz entsteht!

Unter der Annahme, die Geburt eines Buben ist genau so wahrscheinlich wie die eines Mädchens, so ist die Anzahl der Buben bei 800 Geburten _____①_____ , weil _____②_____.

Möglichkeiten für ①	
in guter Annäherung normalverteilt	X
nicht normalverteilt	
gleichmäßig verteilt	

Möglichkeiten für ②	
$\sigma > 9$	
$np(1-p) > 9$ X	
$n > 100$	

(b) (2 Punkte) Bei den 800 Neugeborenen waren 425 Buben und 375 Mädchen.

Testen Sie mit einem Sicherheitsniveau von 95%, ob das Rauchen vor und während der

Schwangerschaft die Geburt eines Buben begünstigt, oder nicht!

– Nullhypothese $p = 0,5$. $z = 1,96$. Dann finden wir, dass unter der Nullhypothese 95% aller solcher Experimente eine Anzahl von Buben im Intervall $400 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{800}{4}} \approx 400 \pm 27,7$ hat. Somit kann man die Nullhypothese nicht verwerfen.

(c) (2 Punkte) Um die Ergebnisse des Arztes zu verifizieren (oder falsifizieren) wählt ein zweiter Arzt eine noch viel größere Stichprobe und ein noch höheres Sicherheitsniveau: Er hat vor, bei 10.000 Geburten bei Frauen, die vor und während der Schwangerschaft rauchten, das Geschlecht des Babys zu erruieren, und mit den Ergebnissen will er mit einem Sicherheitsniveau von 99% testen, ob das Rauchen während und vor der Schwangerschaft die Geburt eines Buben begünstigt.

Bestimmen Sie, wie viele der 10.000 Babys ein Bub sein muss, damit dieser zweite Arzt schlussfolgert, dass das Rauchen vor und während der Schwangerschaft die Geburt eines Buben begünstigt.

– Nullhypothse ist wieder $p = 0,5$. Jetzt $z = 2,576$. Somit haben dann unter Annahme der Nullhypothse 99% der Experimente eine Bubenanzahl im Intervall $5000 \pm 2,576\sqrt{\frac{10.000}{4}} \approx 5000 \pm 129$. Damit ist die Aufgabe gelöst, denn der kritische Wert ist somit 5129.

Aufgabe 5. (Insgesamt 6 Punkte)

Im sehr kleinen Dorf „Neuleerheim“ kommt der Bus nicht sehr oft, und auch nicht sehr regelmäßig, aber im Schnitt etwa jede Stunde hält ein Bus im Dorf. In Neuleerheim gibt es nur eine Bushaltestelle.

Sei T die Zeit in Minuten, die man auf den Bus warten muss. Aus theoretischen Gründen weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man zwischen a und b Minuten (mit $a < b < 120$) warten muss, in guter Annäherung durch folgendes Integral gegeben ist:

$$P(a \leq T \leq b) = C \int_a^b e^{-\frac{t}{60}} \mathrm{d}t$$

wobei C eine positive reelle Zahl ist

(a) Man weiß, dass man in Wirklichkeit maximal hundertzwanzig Minuten warten muss. Daher gilt $P(0 \leq T \leq 120) = 1$.

- **(1 Kompensationspunkt)** Bestimmen Sie konstante C.

– Das Integral $\int_{120}^{0} e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t$ hat den Wert $60(1-e^{-2})$. Also $C = \frac{1}{60(1-e^{-2})}$.

• (2 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchstens eine Stunde auf dem Bus warten müssen.

Man findet hier das Gefragte mittels $P(0 \leq T \leq 60) = C\int_0^{60} e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t = \frac{60(1-e^{-1})}{60(1-e^{-2})} = \frac{1-e^{-1}}{1-e^{-2}} = \frac{1}{1+e^{-1}} = \frac{e}{1+e}$.

(b) (3 Punkte) Jemand wartet schon zwanzig Minuten auf den Bus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus auch in den nächsten zwanzig Minuten nicht kommt, gegeben, dass der Bus in den ersten zwanzig Minuten schon nicht gekommen ist.

Sei A das Ereignis, dass man mindestens 40 Minuten warten muss, und B das Ereignis, dass der Buss nicht innerhalb von 20 Minuten kommt:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(T>40)}{P(T>20)} = \frac{1-P(T\leq 40)}{1-P(T\leq 20)}$$

und da für $x < 120$ gilt $P(T > x) = 1 - P(T \leq x) = 1 - C\int_0^x e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t = C\int_0^{120} e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t - C\int_0^x e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t = C\int_x^{120} e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t$ reduziert das Gefragte auf

$$\frac{C\int_{40}^{120} e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t}{C\int_{20}^{120} e^{-\frac{t}{60}}\mathrm{d}t} = \frac{-60\cdot(e^{-2}-e^{-2/3})}{-60\cdot(e^{-2}-e^{-1/3})} = \frac{e^{4/3}-1}{e^{5/3}-1}$$