Erste Schularbeit Mathematik Klasse 8D WIKU am 30.10.2015

KORREKTUR UND KOMMENTAR

Aufgabe 1. (2P) **Parameter einer linearen Funktion bestimmen**.

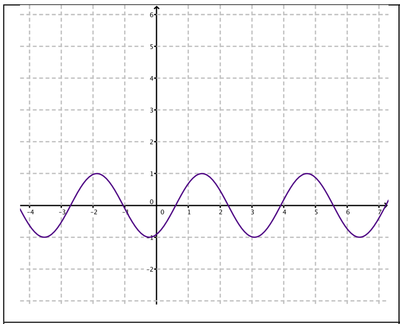
Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax - 4$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Fläche, die durch die erste Achse, die zweite Achse und den Graphen von f begrenzt wird, 10 beträgt.

$a = \frac{4}{5} = 0,8$

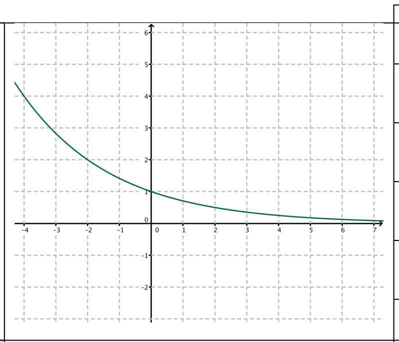
Begründung: Die Steigung ist a und a ist positiv. Achsenabschnitt ist -4. Der Graph schneidet die x-Achse wenn $ax = 4$. Also bei $x = 4/a$. Die angegebene Flächse ist somit ein Dreieck mit Eckpunkten $(0;0)$, $(0;-4)$ und $(4/a;0)$. Dieses Dreieck hat Fläche $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4/a = \frac{8}{a}$. Dies muss 10 sein. Achtung: In der Angabe steht Fläche: das Integral ist hier eine negative Zahl.

Aufgabe 2. (2P) **Funktionsklassen ihren Graphen zuordnen**.

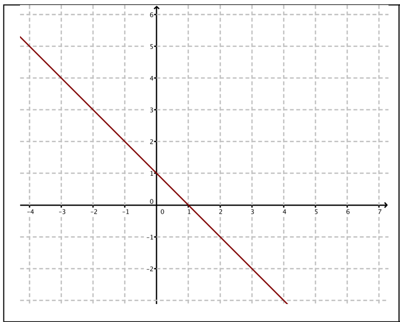
Gegeben sind vier Graphen von Funktionen. Ordnen Sie jeden Graphen ihrem Funktionstyp zu.



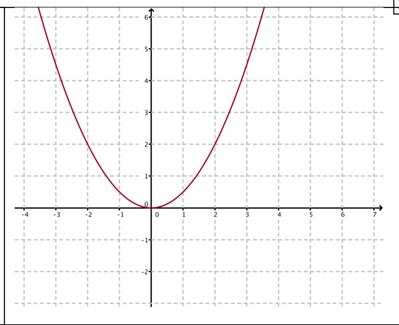
F



D



A



C

Funktionstyp	
lineare Funktion	**A**
indirekte Proportionalität	**B**
quadratische Funktion	**C**
Exponentialfunktion	**D**
Wurzelfunktion	**E**
periodische Funktion	**F**

Aufgabe 3. (2P) **Interpretationssache**.

Es sei $P(t)$ die Leistung eines Geräts, das um 8:00 eingeschalten wird, wobei t die Zeit in Sekunden ab 8:00 bedeutet. Die Leistung P wird in Watt (Joule pro Sekunde) ausgedrückt. Interpretieren Sie den Ausdruck $A = \displaystyle\int_0^{3600} P(t)\mathrm{d}t$.

Antwort: A gibt die von dem Gerät zwischen 8:00 und 9:00 verbrauchte Energiemenge an. Achtung: 3600 Sek ist eine Stunde. Leistung ist die Zeit-Ableitung von Energie, Energie ist das Zeit-Integral von der Leistung.

Aufgabe 4. (2P) **Periode einer periodischen Funktion**.

Gegeben ist die periodische Funktion $q(x) = 3\sin(6x)$. Bestimmen Sie die Periode von q.

Periode: $\frac{\pi}{3}$

Aufgabe 5. (2P) **Äquivalente Terme**.

Gegeben sind vier Terme. Ordnen Sie jedem Term in der linken Tabelle den passenden äquivalenten Term aus der rechten Tabelle zu!

Linke Tabelle	
$x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$	**D**
$x \cdot \frac{1}{x} - 1$	**A**
$\frac{1}{x-1} + 1$	**E**
$x \cdot \left(x - 1\right)$	**C**

Rechte Tabelle	
A	0
B	$x^2 - 1$
C	$x^2 - x$
D	$x - 1$
E	$\frac{x}{x-1}$
F	$x - \frac{1}{x}$

Aufgabe 6. (2P) **Quadratische Gleichungen**.

Gegeben ist die quadratische Gleichung $3x^2 + cx + 3 = 0$, wobei $c \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie den Wert von c, für welchen die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.

$c = 6$

Begründung: Die Diskriminante muss verschwinden, also $c^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0$, also $c^2 = 36$. Da in der Angabe steht, dass $c > 0$, muss hier die Wahl auf $c = 6$ fallen.

Aufgabe 7. (2P) **Parallele Geraden**.

Gegeben sind die zwei Geraden g_1 und g_2 in $\mathbb{R}^2$, welche durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$g_1 : \quad 2x - y = 5\,, \qquad\qquad g_2 : \quad a \cdot x + 10y = 8\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Bestimmen Sie den Wert von a, sodass die zwei Geraden g_1 und g_2 parallel sind.

$a = -20$

Begründung: g_1 hat einen Normalvektor $(2|-1)$ und g_2 hat einen Normalvektor $(a|10)$. Die zwei sind parallel, wenn $\frac{2}{-1} = \frac{a}{10}$, also wenn $a = -20$.

Aufgabe 8. (2P) **Termdarstellung für eine Gerade finden**.

Der Graph einer linearen Funktion f schneidet die erste Achse bei $x = 9$ und die zweite Achse bei $y = 3$. Finden Sie einen Termdarstellung für f!

$f(x) = -\frac{x}{3} + 3$

Begründung: Der Achsenabschnitt ist also 3. Aus einer Skizze siehst du, dass die Steigung negativ sein muss, und dass die Funktion im Interval $[0; 9]$ um drei abfällt. Somit ist die Steigung $-\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$. Achtung: Liebe Leute, bitte nicht etwas wie $\frac{3}{9}$ stehen lassen. Sorge dafür, dass so etwas bei der Matura den Spaß nicht verdirbt!

Aufgabe 9. (2P) **Stammfunktionen**.

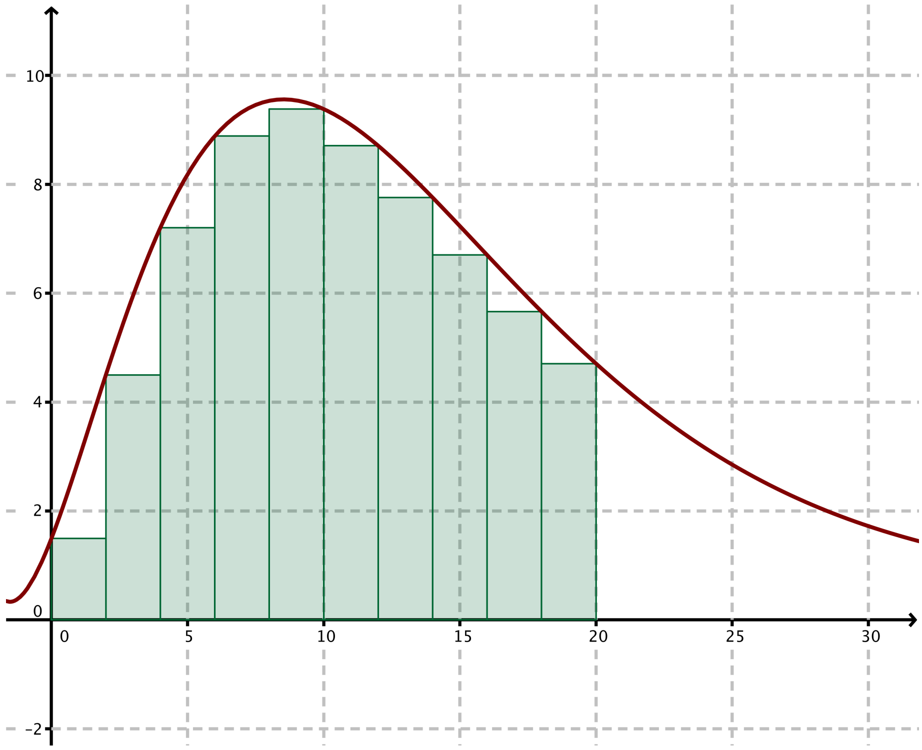
Gegeben sind die Funktionen $a(x) = 3x^2$ und $b(x) = \frac{2}{x^2}$. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale von a und b!

$$\int a(x)\mathrm{d}x = x^3 + C \quad , \qquad \int b(x)\mathrm{d}x = -\frac{2}{x} + C,$$ wobei jeweils C irgendeine reelle Zahl ist.

Achtung: Solche Stammfunktionen sind zu wissen!!! Und zwar hat die Funktion $\frac{1}{x}$ eine Stammfunktion $\ln(x)$, aber die Funktion $\frac{1}{x^2}$ hat dann noch nicht eine Stammfunktion $\ln(x^2)\ldots$

Aufgabe 10. (2P) **Abschätzung eines Integrals**.

Gegeben sind der Graph einer Funktion f sowie eine aus einigen Rechtecken bestehende Fläche, deren Flächeninhalt 130 beträgt. Kreuzen Sie für den dargestellten Sachverhalt die beiden zutreffenden Aussagen an!

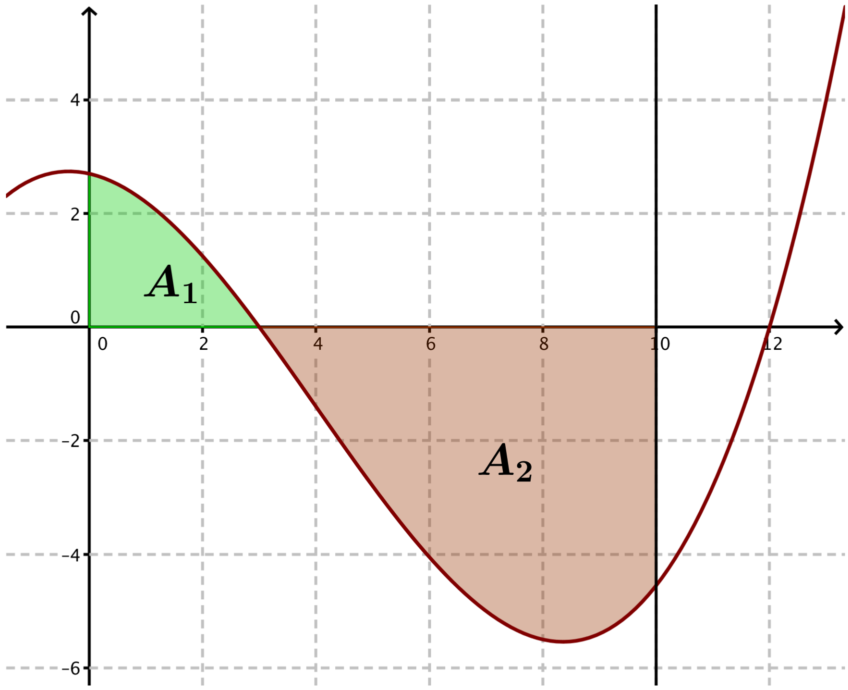


☐	$\displaystyle\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x = 130$
☐	$\displaystyle\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x < 130$
☒	$\displaystyle\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x > 130$
☐	$\displaystyle\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 4$
☒	$\displaystyle\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x \leq 100$

Begründung: Man sieht, dass hier eine (echte) Untersumme gebildet wurde, die Untersumme beträgt 130. Somit ist die dritte Ungleichheit wahr - und somit die ersten zwei nicht. Zweitens sieht man, dass die vierte Aussage nicht simmen kann. Drittens sieht man, dass die Funktion auf dem Intervall $[0; 10]$ von der Funktion $g(x) = 10$ beschränkt wird, somit ist das Integral kleiner als $10 \cdot 10 = 100$.

Aufgabe 11. (2P) **Flächeninhalt und Integral**.

In der folgenden Abbildung ist A_1 der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen der Funktion f eingeschlossen wird, und A_2 der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, dem Graphen von f und der Geraden $x = 10$ eingeschlossen wird. Kreuzen Sie den Term an, der die Zahl $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x$ korrekt angibt!

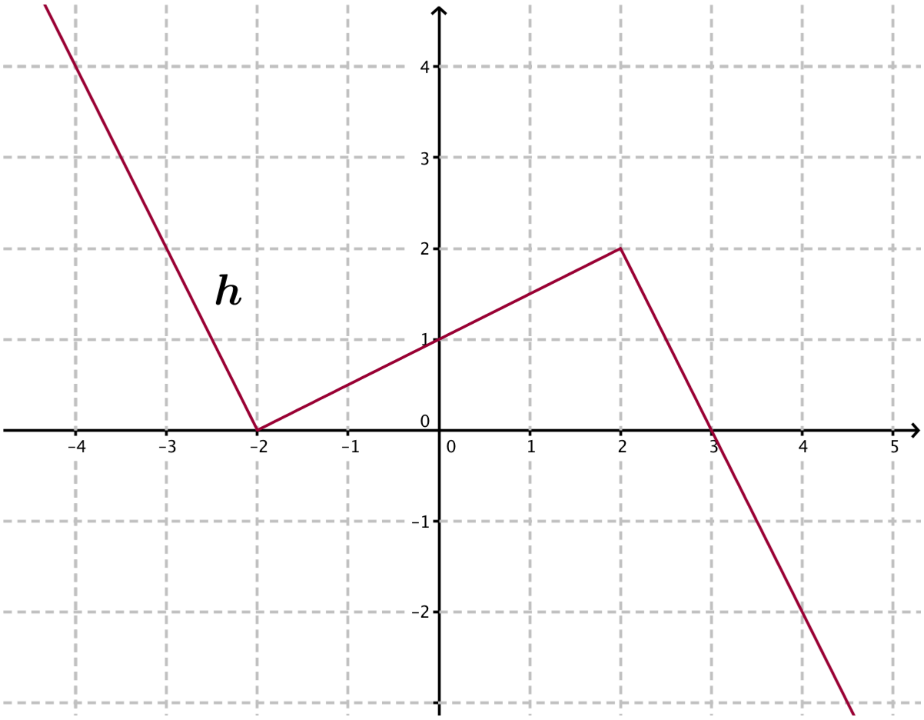


☐	$\lvert A_1 + A_2 \rvert$
☐	$A_1 + A_2$
☐	$\lvert A_1 - A_2 \rvert$
☒	$A_1 - A_2$
☐	$A_2 - A_1$

Begründung: Das Integral ist hier die Summe von den Flächen, aber dann mit Vorzeichen. Da der erste Teil (A_1) über der x-Achse liegt, bekommt der Teil ein $+$-Zeichen. Da der zweite Teil (A_2) unter der x-Achse liegt, bekommt dieser Teil ein $-$-Zeichen.

Aufgabe 12. (2P) **Ermitteln eines Integrals**.

In der Abbildung sehen Sie den Graphen einer Funktion h. Bestimmen Sie das Integral $\int_{-4}^{4} h(x)\mathrm{d}x$.



$$\int_{-4}^{4} h(x)\mathrm{d}x = 8$$

Achtung: Gut Kästchen Zählen, oder Dreiecke nehmen. Auch hier: die Teile über der x-Achse positiv mitnehmen, unter der x-Achse davon subtrahieren. Die Teile zwischen auf den Intervallen $[2;3]$ und $[3;4]$ fallen gegen einander weg.

Erste Schularbeit Mathematik Klasse 8D WIKU am 30.10.2015

TEIL 2

Aufgabe 1. *Finanzmathematik.*

In Firma Epsilon werden Getränke produziert. Die Produktionseinheit wird mit x bezeichnet. Es sei $K(x)$ die Kostenfunktion, wobei die Kosten in Millionen Euro angegeben werden. In guter Annäherung kann K durch folgendes Polynom beschrieben werden:

$$K(x) = x^3 - 30x^2 + 310x + 3000$$

(a). (2 Kompensationspunkte) Die erste Ableitung der Kostenfunktion wird als Grenzkostenfunktion bezeichnet. Sie gibt an, um wie viel die Kosten steigen, wenn eine Einheit mehr produziert wird. Geben Sie einen Termausdruck für die Grenzkostenfunktion.

(b). (3 Punkte) Ist die zweite Ableitung der Kostenfunktion positiv, so nennt man den Verlauf der Kostenfunktion progressiv. Ist die zweite Ableitung der Kostenfunktion negativ, so nennt man den Verlauf der Kostenfunktion degressiv. Der Wendepunkt der Kostenfunktion heißt die Kostenkehre. Geben Sie an, in welchem Interval der Verlauf der Kostenfunktion progressiv bzw. degressiv ist, und bestimmen Sie die Kostenkehre.

(c). (3 Punkte) Die Erlösfunktion beschreibt den Ertrag $E(x)$ in Abhängigkeit von der produzierten Menge x. Für die Firma Epsilon wird $E(x)$ durch $E(x) = 420x$ gegeben. Die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ beschreibt den Gewinn der Firma. Im sogenannten Cournot'schen Punkt x_C ist der Gewinn maximal. Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt x_C und den maximalen Gewinn.

(a) $K'(x) = 3x^2 - 60x + 310$

(b) $K''(x) = 6x - 60$. Kostenkehre ist also bei $x = 10$. Der Verlauf ist progressiv im Interval $(10; \infty)$ und degressiv im Intervall $[0; 10)$. Achtung: x kann nicht negativ sein. Der Punkt $x = 10$ muss bei den Intervallen ausgenommen werden.

(c) $G'(x) = 0$, also $E'(x) = K'(x)$, also $3x^2 - 60x - 110 = 0$. Das mit der *abc*-Formel lösen. Man findet $x_C \approx 21,7$. Die andere Wurzel ist negativ, welche aus logischen Gründen ausgeschlossen ist (negative Anzahlen sind nicht zu produzieren). Daher findet man $G(x_C) = E(x_C) - K(x_C) \approx 3295$ Millionen Euro.

Aufgabe 2. *Fall eines Wassertropfens.*

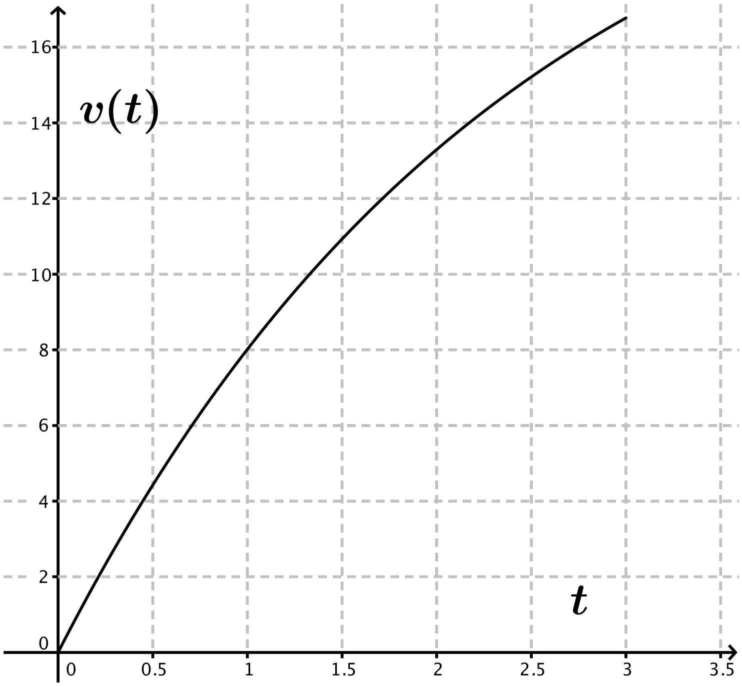
Ein Wassertropfen von etwa 8mm Durchmesser fällt von einer Dachrinne nach unten. Seine Geschwindigkeit v wird in Meter pro Sekunde angegeben, die Zeit wird in Sekunden angegeben, wobei $t = 0$ mit dem Zeitpunkt korrespondiert, in dem der Tropfen die Dachrinne loslässt. In guter Annäherung wird die Geschwindigkeit durch folgende Formel beschrieben:

$$v(t) = 23,5 \cdot \left(1 - e^{-0,417 \cdot t}\right)$$

Die Dachrinne befindet sich auf 15m Höhe.

(a). (2 Kompensationspunkte) Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{\int_0^{0,5} v(t) \mathrm{d}t}{0,5}$.

(b). (4 Punkte) Berechnen Sie, auf welcher Höhe vom Boden sich der Wassertropfen nach einer Sekunde befindet.



Die Abbildung stellt $v(t)$ im Interval $[0; 3]$ dar.

(a) Das Integral ist der zurückgelegte Weg im Intervall $[0; 0,5]$. Dann wird durch die Zahl $0,5$ dividiert. Somit: Der Ausdruck gibt die mittlere Geschwindigkeit auf dem Intervall $[0; 0,5]$.

(b) In der ersten Sekunde legt der Tropfen zurück

$$\int_0^1 23,5 \cdot \left(1 - e^{-0,417 \cdot t}\right) \mathrm{d}t = 23,5 \cdot \left[t + \frac{e^{0,417t}}{0,417}\right]_0^1 \approx 60,26 - 55,95 \approx 4,3\,.$$

Somit befindet der Tropfen sich auf $15 - 4,3 = 10,7$ Meter Höhe.

Aufgabe 3. *Drehkörper.*

Es sei $f(x) = \sqrt{0,5 \cdot x + 2}$ gegeben.

(a). (2 Kompensationspunkte) Bestimmen Sie a so, dass $f(a) = 2 \cdot f(0)$.

(b) (4 Punkte) Die Fläche, die von dem Graphen von f, der y-Achse, der x-Achse und der Geraden $x = a$ eingeschlossen wird, wird um die x-Achse gedreht. Berechnen Sie das Volumen des so entstandenen Rotationskörpers.

(a) $f(0) = \sqrt{2}$, somit $\sqrt{0,5 \cdot a + 2} = 2\sqrt{2}$. Dann quadrieren: $0,5a+2 = 8$, denn $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot 2 = 8$. Daher $0,5a = 6$ und somit $a = 12$.

(b) Kurzform $V = \pi \int_0^{12} y^2 \mathrm{d}x$, also dann einsetzen: $V = \pi \int_0^{12} (0,5x+2) \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^{12} = \pi(36 + 24) = 60\pi \approx 188,5$.

Aufgabe 4. *Die Zahl π.*

Betrachten Sie den Kreis $K: \ x^2 + y^2 = 4$ und die Funktion $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Man betrachte, dass der Graph von g im Interval $[-2; 2]$ mit einem Teil des Kreises K zusammenfällt.
(a). (2 Kompensationspunkte) Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an!

☐	$\int_{-2}^{2} g(x) \mathrm{d}x = \pi$
☒	$\int_{0}^{2} g(x) \mathrm{d}x = \pi$
☐	$\int_{0}^{2} g(x) \mathrm{d}x > \pi$
☒	$\int_{-2}^{2} g(x) \mathrm{d}x > \pi$
☐	$\int_{0}^{2} g(x) \mathrm{d}x = 2\pi$

(b). (2 Punkte) Benutzen Sie die Begriffe *Riemannsumme, Untersumme, Obersumme, Flächeninhalt*, um zu verdeutlichen, wie man mithilfe eines Computers und des hier oben dargestellten Sachverhalts eine recht gute Annäherung von der Zahl π bekommen kann. (Wir gehen mal davon aus, Sie können einen Computer programmieren und einen Computer bestimmte Rechenschritte fast beliebig schnell durchführen lassen.)

(a) Es handelt sich hier um einen Kreis von Radius 2, also ist der Flächeninhalt 4π. Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind bei $x = \pm 2$. Somit $\int_{-2}^{2} g(x) \mathrm{d}x = 2\pi$, da dies die Hälfte ist, und $\int_0^2 g(x) \mathrm{d}x = \pi$, ein Viertel von diesem Kreis. Somit ist die erste Aussage klar falsch, die zweite eindeutig richtig, die dritte falsch, da $\pi > \pi$ falsch ist. Weil 2π mehr als π ist, ist die vierte Aussage richtig. Und da $\pi = 2\pi$ falsch ist, so auch die letzte Aussage.

(b) (Ausführliche Version:) Wir zerlegen das Intervall $[0;2]$ in n Intervallen $[a_i;b_i]$ - wobei $1 \leq i \leq n$. Wenn x_i ein Punkt im Intervall $[a_i;b_i]$ ist, so ist die Riemannsumme $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i)$ eine Annäherung vom Integrall aus (a), somit für π.

Wir bekommen eine Untersumme durch

$$U(n) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)(b_i - a_i)$$

und eine Obersumme durch

$$U(n) = \sum_{i=1}^{n} f(b_i)(b_i - a_i)$$

da die Funktion fallend ist, sodass f auf dem Intervall $[a_i;b_i]$ bei a_i maximal ist und bei b_i minimal ist. Es gilt somit

$$U(n) \leq \pi \leq O(n)\,.$$

Nehmen wir jetzt n immer größer und größer, so nähern sich diese Unter- und Obersummen einander, und somit π an.

Wir können wählen $a_i = \frac{2i-2}{n}$ und $b_i = a_{i+1} = \frac{2i}{n}$. Auf diese Weise ist tatsächlich für $i = 0$: $a_0 = 0$, $b_0 = \frac{2}{n}$ und für $i = n$ gilt: $a_n = \frac{2n-2}{n}$ und $b_n = 2$. Man sieht auch $b_i - a_i = \frac{2}{n}$.

Für diese konkrete Wahl von Intervallen sieht man, dass ein Computer sie für gegeben n wie folgt berechnen kann:

$$U(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-2}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

und

$$U(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right) \cdot \frac{2}{n}$$

Falls wir π bis auf 10 Dezimalstellen haben wollen, nehmen wir n so hoch, dass $O(n) - U(n) < 10^{-10}$. Dann sind die ersten 10 Dezimalstellen von $U(n)$ und $O(n)$ gleich und somit sind dies die ersten zehn Dezimalstellen von π.