

# Dritte Schularbeit Mathematik Klasse 8D WIKU am 16.03.2016

**SCHÜLERNAME:** \_\_\_\_\_

Punkte im ersten Teil: \_\_\_\_\_

Punkte im zweiten Teil: \_\_\_\_\_

Davon Kompensationspunkte: \_\_\_\_\_

Note: \_\_\_\_\_

## **Notenschlüssel:**

Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und der erzielten Punkte des ersten Teils weniger als 24 ist, so ist die Note **Nicht Genügend**. Falls diese Summe 24 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
72 - 63 Punkte	Sehr Gut (1)
62 - 52 Punkte	Gut (2)
50 - 36 Punkte	Befriedigend (3)
35 - 24 Punkte	Genügend (4)

**Aufgabe 1.** (2 Punkte) Eine Firma hat  $B$  Beschäftigte. Der Anteil der männlichen Angestellten liegt bei 70%. Und 40% aller männlicher Mitarbeiter dieses Betriebs rauchen.

Beschreiben Sie die Anzahl  $N$  der **männlichen Nichtraucher** dieser Firma mit Hilfe eines geeigneten Terms:

**Antwort:**  $N =$  \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2.** (2 Punkte) Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.

Ordnen Sie jeder Lösungsmenge  $L$  die entsprechende quadratische Gleichung in der Menge der reellen Zahlen zu!

$L = \{0, 3\}$	
$L = \emptyset = \{ \}$	
$L = \{3\}$	
$L = \{-3, 3\}$	

A	$(x + 3)^2 = 0$
B	$x \cdot (x - 3) = 0$
C	$-x^2 = 9$
D	$x^2 - 9 = 0$
E	$x^2 - 6x + 9 = 0$
F	$(x - 3)^2 = 16$

**Aufgabe 3.** (2 Punkte) Betrachten Sie die Gerade  $g$ , die durch folgende **Parameterdarstellung** definiert ist:

$$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

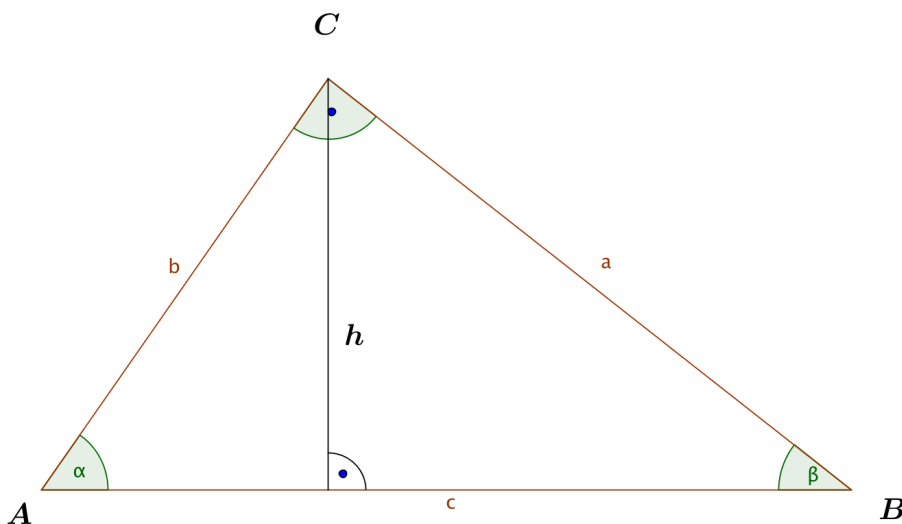
Finden Sie einen Normalvektor zur Geraden  $g$  und benutzen Sie diesen, um eine **Gleichung** (Normalvektorform) für eine Gerade  $h$  aufzustellen, die (1) parallel zu  $g$  ist und (2) durch den Punkt  $P = (2|0)$  geht.

Normalvektor zu  $g$ : \_\_\_\_\_

Gleichung für  $h$ : \_\_\_\_\_

**Aufgabe 4.** (2 Punkte) Verwenden Sie die gegebene Skizze eines **rechtwinkligen** Dreiecks  $\triangle ABC$ ;  $\angle BCA$  ist ein rechter Winkel,  $AB = c$  und die Höhe von  $C$  auf  $AB$  ist eingezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

(1). $\sin \alpha = \frac{b}{h}$	<input type="checkbox"/>
(2). $\tan \alpha = \frac{h}{c}$	<input type="checkbox"/>
(3). $\sin \alpha = \frac{a}{c}$	<input type="checkbox"/>
(4). $\cos \beta = \frac{a}{c}$	<input type="checkbox"/>
(5). $\sin \beta = \frac{h}{a}$	<input type="checkbox"/>



**Aufgabe 5.** (2 Punkte) Ein Rechteck hat einen Umfang von 20 Meter. Falls eine Seite des Rechtecks gegeben ist, ist der Flächeninhalt bestimmt. Es soll die Funktion  $A$  für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von einer Rechteckseite  $b$  aufgestellt werden.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Funktionsgleichungen an!

(1). $A(b) = b \cdot (20 - 2b)$	<input type="checkbox"/>
(2). $A(b) = (10 - b) \cdot b$	<input type="checkbox"/>
(3). $A(b) = (10 - b) \cdot 2b$	<input type="checkbox"/>
(4). $A(b) = (20 - 2b) \cdot 0,5 \cdot b$	<input type="checkbox"/>
(5). $A(b) = 10 - b \cdot b$	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 6.** (2 Punkte) Für eine Funktion  $f$  gilt  $f(0) = -2$  und  $f'(0) = 3$ .

Gib eine Funktionsgleichung der Tangente  $t$  an den Graphen der Funktion  $f$  im Punkt  $(0|f(0))$  an!

$y =$  \_\_\_\_\_

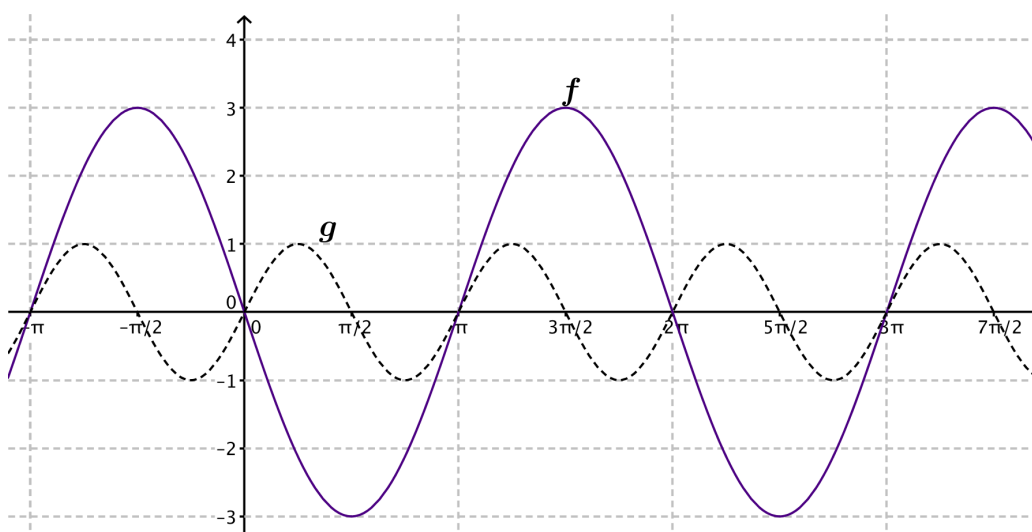
**Aufgabe 7.** (2 Punkte) Die folgenden Aussagen beschreiben Eigenschaften von Polynomfunktionen  $f$  mit

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_i \in \mathbb{R}.$$

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Jede Polynomfunktion, die zwei lokale Extremstellen hat, ist mindestens von Grad drei.	<input type="checkbox"/>
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Polynomfunktion, die genau zwei Nullstellen hat, hat mindestens eine Extremstelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Polynomfunktion, deren Grad größer als 3 ist, hat mindestens eine lokale Extremstelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Polynomfunktion vierten Grades hat mindestens eine Nullstelle.	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 8.** (2 Punkte) Gegeben sind die Graphen der periodischen Funktionen  $f$  und  $g$ .



Geben Sie die Funktionsterme von  $f$  und  $g$  an!

$f(x) =$  \_\_\_\_\_,

$g(x) =$  \_\_\_\_\_.

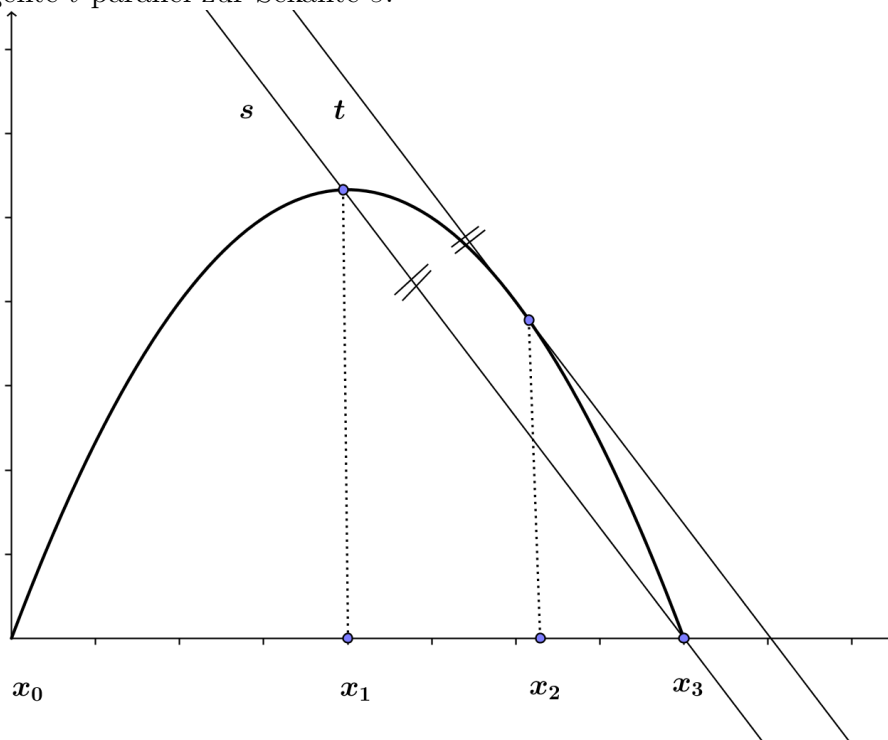
**Aufgabe 9.** (2 Punkte) Die Einwohnerzahl einer Stadt wird in folgenden Jahren gemessen:  
im Jahr 2000: 134.000 Einwohner,  
im Jahr 2016: 178.000 Einwohner.

Der Bürgermeister will diesen Wachstumsvorgang durch eine Exponentialfunktion  $E(t) = a \cdot b^t$  ( $t$  in Jahren ab 2000,  $E(t)$  Anzahl der Einwohner) beschrieben sehen. Berechnen Sie  $a$  und  $b$ !

$a =$  \_\_\_\_\_,

$b =$  \_\_\_\_\_.

**Aufgabe 10.** (2 Punkte) Gegeben ist eine Polynomfunktion  $f$  zweiten Grades. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph dieser Funktion im Intervall  $[0; x_3]$ , sowie eine Sekante  $s$  und eine Tangente  $t$  dargestellt. Die Stellen  $x_0$  und  $x_3$  sind Nullstellen,  $x_1$  ist eine lokale Extremstelle von  $f$ . Weiters ist die Tangente  $t$  parallel zur Sekante  $s$ .



Kreuzen Sie die beiden für die in der Figur abgebildeten Funktion  $f$  zutreffenden Aussagen an!

$f'(x_0) = f'(x_3)$	<input type="checkbox"/>
$f'(x_0) = 0$	<input type="checkbox"/>
$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} > 0$	<input type="checkbox"/>
$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	<input type="checkbox"/>
$f'(x_1) = 0$	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 11.** (2 Punkte) In der untenstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion  $f$  im Intervall  $[-4; 3]$  dargestellt.



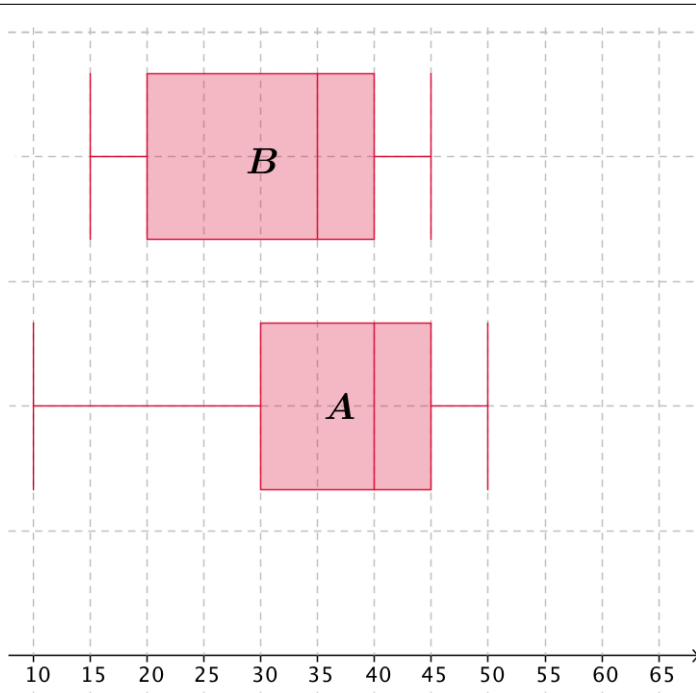
Geben Sie das Intervall, beziehungsweise, diejenigen Stellen  $x \in [-4; 3]$  an, für die gilt, dass die erste Ableitung (strikt) negativ ist;  $f'(x) < 0$ .

Antwort: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 12.** (2 Punkte) Gegeben ist eine Funktion  $s$  mit der Gleichung  $s(t) = \frac{t^3}{6} + 5t^2 + 5t$ . Die Funktion  $s$  beschreibt den von einem Körper zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ . Die Funktion  $v$  gebe die Geschwindigkeit des Körpers in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  an.

Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $v$  an!

$v(t) =$  \_\_\_\_\_



**Aufgabe 13.** (2 Punkte) Bei einem Konsumententest werden zwei Arten von Tablet-Computern  $A$  und  $B$  verglichen. Beide Geräte werden von den Testern mit jeweils 0 bis 50 Punkten bewertet. In den hier links dargestellten Kastenschaubildern sind die Ergebnisse des Tests dargestellt.

Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

Die Ergebnisse von Tablet-Computer $B$ streuen stärker als jene von $A$ .	<input type="checkbox"/>
Die erreichte Mindestpunktzahl ist bei $B$ höher als bei $A$ .	<input type="checkbox"/>
Ca. 50% der Befragten bewertete Marke $A$ mit 30 bis 45 Punkten.	<input type="checkbox"/>
Ca. 50% der Befragten bewertete Marke $B$ mit 35 Punkten.	<input type="checkbox"/>
Ca. 25% der Befragten bewertete Marke $B$ mit höchstens 40 Punkten.	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 14.** (2 Punkte) Eine Zufallsvariable  $X$  sei normalverteilt mit den Parametern  $\mu = 7$  und  $\sigma = 1,5$ . Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

$P(X \geq 6) < 0,5$	<input type="checkbox"/>
$P(X \leq 7) = 0,5$	<input type="checkbox"/>
$P(X \leq 8) > 0,5$	<input type="checkbox"/>
$P(X > 9) = P(X < 5)$	<input type="checkbox"/>
$P(X \leq 6) = P(X > 7)$	<input type="checkbox"/>



**Aufgabe 15.** (2 Punkte) Es wird zehnmal mit einem ehrlichen, herkömmlichen Spielwürfel gewürfelt. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass höchstens zweimal die Augenzahl 6 gewürfelt wird. Kreuzen Sie den (einen) zutreffenden Term an!

$1 - \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	<input type="checkbox"/>
$\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	<input type="checkbox"/>
$\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$	<input type="checkbox"/>
$\binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	<input type="checkbox"/>
$1 - \left( \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \right)$	<input type="checkbox"/>
$\binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$	<input type="checkbox"/>

**Aufgabe 16.** (2 Punkte) Für eine Abfolge von vier verschiedenen Bildern  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  gibt es nur eine richtige Reihung und zwar  $ABCD$ . Diese Bilder werden gemischt und, ohne sie anzusehen, in einer Reihe aufgelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P$  in Prozent, dass die richtige Reihenfolge erscheint.

$P =$  \_\_\_\_\_ %

**Aufgabe 17.** (2 Punkte) Das Rauchverbot in Lokalen wird in Österreich sehr emotional diskutiert. Aufgrund von Umfragen weiß man, dass 62% ein Rauchverbot in Lokalen befürworten und 17% der Befürworter eines Rauchverbots in Lokalen selber Raucher sind. Insgesamt sind unter den Befragten 39,04% Raucher.

Gehen Sie davon aus, dass 10.000 Personen befragt wurden und füllen Sie dann die folgende Vierfeldertafel aus. Berechnen Sie damit die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass ein willkürlich ausgewählter Gegner des Rauchverbots in Lokalen ein Raucher ist!

	Raucher	Nichtraucher	Summe
Befürworter	1054		6200
Gegner			
Summe	3904		10.000

$P =$  \_\_\_\_\_

**Aufgabe 18.** (2 Punkte) Aufgrund einer umfangreichen Befragung veröffentlicht ein Meinungsforschungsinstitut vor einer Landtagswahl das 95%-Konfidenzintervall  $[0,19; 0,24]$  für den relativen Wähleranteil der Partei  $X$ . Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der unbekannte relative Wähleranteil der Partei $X$ liegt mit Sicherheit im Intervall $[0,19; 0,24]$ .	<input type="checkbox"/>
Die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte relative Wähleranteil der Partei $X$ außerhalb des Intervalls $[0,19; 0,24]$ liegt, ist kleiner als 1%.	<input type="checkbox"/>
Ein 99%-Konfidenzintervall für den relativen Wähleranteil der Partei $X$ wäre kleiner als das 95%-Konfidenzintervall gewesen.	<input type="checkbox"/>
Hätte man die gleiche relative Häufigkeit der Wähler der Partei $X$ in einer größeren Stichprobe erhalten, hätte sich ein kleineres 95%-Konfidenzintervall ergeben.	<input type="checkbox"/>
Gibt man sich mit einem größeren 95%-Konfidenzintervall zufrieden, so hätte man weniger Personen befragen müssen.	<input type="checkbox"/>

### **3. Schularbeit Mathematik am 16.03.2016**

Klasse 8D WIKU

#### **Teil 2**

**SCHÜLERNAME:** \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1.** (Insgesamt 7 Punkte)

Unter den Gesamtkosten eines Betriebes versteht man alle Ausgaben, die für die Produktion anfallen. Mit mathematischen Mitteln können die Kostenverläufe beschrieben werden, die für Betriebe strategische Entscheidungshilfen sind.

Die Gleichung der Gesamtkosten  $K : [0; 100] \rightarrow \mathbb{R}$  eines bestimmten Produkts lautet

$$K(x) = 0,001x^3 - 0,09x^2 + 2,8x + 5$$

wobei  $x$  die produzierte Mengeneinheit (ME) ist und  $x \in [0; 100]$ .

**(a) (1 Kompensationspunkt)** Die Stückkostenfunktion  $\bar{K}$  beschreibe *die Gesamtkosten pro ME*. Geben Sie eine Funktionsgleichung für  $\bar{K}$  für das oben beschriebene Produkt an!

**(b) (2 Punkte)** Der Wert der Grenzkostenfunktion  $K'$  wird als Kostenzuwachs bei der Zunahme der Produktion um eine Mengeneinheit interpretiert, obwohl diese betriebswirtschaftliche Interpretation im Allgemeinen mathematisch nicht exakt ist.

- Geben Sie das mathematisch korrekte Änderungsmaß an, das der angestrebten betriebswirtschaftlichen Interpretation entspricht!
- Für welche Art von Kostenfunktionen ist die betriebswirtschaftliche Interpretation der Grenzkostenfunktion gleichzeitig auch mathematisch exakt? Geben Sie den Funktionstyp an!

**(c) (2 Punkte)** Pro verkaufter Mengeneinheit bekommt man 1,5 Geldeinheiten (GE); der Preis pro Mengeneinheit ist also unabhängig von  $x$  und beträgt 1,5 GE pro ME. Geben Sie einen Term Ausdruck für die Erlösfunktion  $E(x)$  und berechnen Sie, in welchem Bereich man Gewinn macht!

**(d) (2 Punkte)** Der Cournot'sche Punkt ist der Punkt, in dem der Gewinn maximal ist. Geben Sie an, bei welcher Produktionsmenge  $x$  sich der Cournot'scher Punkt befindet!

**Aufgabe 2.** (Insgesamt 8 Punkte)

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  mit  $p, q \in \mathbb{R}$  und die zugehörige Polynomfunktion  $f(x) = x^2 + px + q$ .

(a) (3 Punkte) Lässt sich die Gleichung  $x^2 + px + q$  in der Form  $(x - z)(x - \frac{1}{z}) = 0$  mit  $z \in \mathbb{R}^*$  schreiben, dann spricht man von einer reziproken quadratischen Gleichung.

- Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter  $p$  und  $q$  jeweils von  $z$  anhängen!
- Bestimmen Sie die Werte von  $z$ , für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung hat und geben Sie für jeden dieser Werte von  $z$  jeweils die lokalen Extremstellen von  $f$  an!

(b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert  $q = -1$ , dann erhält man eine Polynomfunktion zweiten Grades  $f(x) = x^2 + px - 1$ .

- (1 **Kompensationspunkt**) Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung  $f(x) = 0$  genau zwei verschiedene Lösungen haben muss!
- (1 Punkt) Begründen Sie, warum die Funktion  $f$  eine positive und eine negative Nullstelle haben muss!

(c) (3 Punkte) Für  $q = p - \frac{1}{3}$  erhält man eine Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + px + p - \frac{1}{3}$ .

- Bestimmen Sie für diese Funktion  $f$  denjenigen Wert von  $p$ , sodass  $\int_{-1}^1 f(x) dx = -6$ .
- Geben Sie an, ob für dieses  $p$  die folgende Gleichheit gilt,

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

und begründen Sie Ihre Entscheidung!

**Aufgabe 3.** (Insgesamt 9 Punkte)

Bei Messungen einer  $70 \text{ km/h}$ -Beschränkung auf einer Bundesstraße ergeben sich Geschwindigkeiten, die annähernd normalverteilt mit den Parametern  $\mu = 79 \text{ km/h}$  und  $\sigma = 9 \text{ km/h}$  sind.

**(a) (2 Kompensationspunkte)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer auf dieser Bundesstraße eine Geschwindigkeit zwischen  $85 \text{ km/h}$  und  $100 \text{ km/h}$  hat?

**(b) (1 Punkt)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer auf dieser Bundesstraße mit einer Geschwindigkeit von mehr als  $110 \text{ km/h}$  fährt?

**(c) (2 Punkte)** Bestimmen Sie ein symmetrisches Intervall um den Erwartungswert, in dem 90% der gemessenen Geschwindigkeiten liegen.

**(d) (2 Punkte)** Welchen Wert müsste eine (veränderte) Standardabweichung  $\sigma$  (bei gleichbleibendem Erwartungswert  $\mu$ ) aufweisen, wenn die Wahrscheinlichkeit 0,96 ist, dass ein beliebig ausgewählter Autofahrer weniger als  $82 \text{ km/h}$  fährt?

**(e) (2 Punkte)** Man weiß auf Grund von den oben angegebenen Daten: 46% aller Autofahrer sind schneller als  $80 \text{ km/h}$ . In einer Aktion „Verkehrssicherheit jetzt!“ werden die Geschwindigkeiten von 500 Autofahrern gemessen.

Bestimmen Sie einen 95%-Schätzbereich an, wie hoch der Prozentanteil bei diesen Autofahrern ist, die schneller als  $80 \text{ km/h}$  fahren.

**Aufgabe 4.** (Insgesamt 6 Punkte)

Bei bestimmten Tierarten entscheidet die Temperatur der Umgebung der Eier, ob aus den Eiern ein Männchen oder ein Weibchen schlüpft. Ein Arzt möchte wissen, ob bei Menschen das Rauchen eine Geburt eines Buben wahrscheinlicher macht, m.a.W. begünstigt.

(a) Der Arzt macht eine Stichprobe unter 800 Neugeborenen, von denen die Mutter vor und während der Schwangerschaft geraucht hat.

(2 **Kompensationspunkte**) Ergänzen Sie durch ankreuzen so, dass ein mathematisch korrekter Satz entsteht!

Unter der Annahme, die Geburt eines Buben ist genau so wahrscheinlich wie die eines Mädchens, so ist die Anzahl der Buben bei 800 Geburten           ①          , weil           ②          .

Möglichkeiten für ①	
in guter Annäherung normalverteilt	<input type="checkbox"/>
nicht normalverteilt	<input type="checkbox"/>
gleichmäßig verteilt	<input type="checkbox"/>

Möglichkeiten für ②	
$\sigma > 9$	<input type="checkbox"/>
$np(1 - p) > 9$	<input type="checkbox"/>
$n > 100$	<input type="checkbox"/>

(b) (2 Punkte) Bei den 800 Neugeborenen waren 425 Buben und 375 Mädchen.

Testen Sie mit einem Sicherheitsniveau von 95%, ob das Rauchen vor und während der Schwangerschaft die Geburt eines Buben begünstigt, oder nicht!

(c) (2 Punkte) Um die Ergebnisse des Arztes zu verifizieren (oder falsifizieren) wählt ein zweiter Arzt eine noch viel größere Stichprobe und ein noch höheres Sicherheitsniveau: Er hat vor, bei 10.000 Geburten bei Frauen, die vor und während der Schwangerschaft rauchten, das Geschlecht des Babys zu eruieren, und mit den Ergebnissen will er mit einem Sicherheitsniveau von 99% testen, ob das Rauchen während und vor der Schwangerschaft die Geburt eines Buben begünstigt.

Bestimmen Sie, wie viele der 10.000 Babys ein Bub sein muss, damit dieser zweite Arzt schlussfolgert, dass das Rauchen vor und während der Schwangerschaft die Geburt eines Buben begünstigt.

**Aufgabe 5.** (Insgesamt 6 Punkte)

Im sehr kleinen Dorf „Neuleerheim“ kommt der Bus nicht sehr oft, und auch nicht sehr regelmäßig, aber im Schnitt etwa jede Stunde hält ein Bus im Dorf. In Neuleerheim gibt es nur eine Bushaltestelle.

Sei  $T$  die Zeit in Minuten, die man auf den Bus warten muss. Aus theoretischen Gründen weiß man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass man zwischen  $a$  und  $b$  Minuten (mit  $a < b < 120$ ) warten muss, in guter Annäherung durch folgendes Integral gegeben ist:

$$P(a \leq T \leq b) = C \int_a^b e^{-\frac{t}{60}} dt$$

wobei  $C$  eine positive reelle Zahl ist

(a) Man weiß, dass man in Wirklichkeit maximal hundertzwanzig Minuten warten muss. Daher gilt  $P(0 \leq T \leq 120) = 1$ .

- (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie konstante  $C$ .
- (2 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie höchstens eine Stunde auf dem Bus warten müssen.

(b) (3 Punkte) Jemand wartet schon zwanzig Minuten auf den Bus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus auch in den nächsten zwanzig Minuten nicht kommt, gegeben, dass der Bus in den ersten zwanzig Minuten schon nicht gekommen ist.