

Planungsblatt Mathematik für die 8D

Woche 13 (von 30.11 bis 04.12)

Hausaufgaben ¹

Bis Mittwoch 02.12:

Lerne / Erledige 5.01, 5.02 und 5.03 und versuche, die Physikbeispiele schon fast fertig zu machen.

Bis Donnerstag 03.12:

Lerne die Notizen und die Seiten 79 und 80 praktisch auswendig! Und das ist nicht, weil ich gemein bin, sondern, weil wir das bis zur Matura wirklich brauchen! Vergiß die Bedeutung der Verteilungsfunktion Φ nicht! Auch der Zusammenhang zwischen (μ, σ) -Verteiltem X und Standard-Normal-Verteiltem $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist EXTREM wichtig!

Bis Mittwoch (?) 09.12:

Lerne / Erledige die Aufgaben 5.06, 5.07, 5.08(a), 5.09(a)(b)(c), 5.10(a), 5.12(a), 5.13

Kernbegriffe dieser Woche:

partielle Integration, Kurvenlänge, Break-Even, Stückkosten, Betriebsoptimum, Cournot'scher Punkt, Finanzmathe! Dichtefunktion, Verteilungsfunktion.

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- (a) **Dienstag** (3. Std) : (i) HÜ-Bespr. und evt. sSWH, (ii) kurze Diskussion über Verteilungen: Kontinuierlich versus diskret, (iii) (1) Schwarzkörperstrahlung bei der Sonne, (2) Körpergröße bei Menschen, (3) Fehler bei Messungen: Normalverteilung! (iv) 5.01 lesen, S. 76 bis 78 durchnehmen: Dichtefunktion und Verteilungsfunktion, 5.02 und 5.03 (schon fertig?), (v) Wenn Zeit: Schon mit den Physikbeispiele anfangen.
- (b) **Mittwoch** (2. Std) : (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) die Physikbeispiele erledigen, (iii) Die Normalverteilung: Seiten 79 und 80 durchnehmen, (iv) 5.05
- (c) **Donnerstag** (4. Std) : (i) HÜ-Bespr. & evt. mSWH, (ii) Übung macht den Meister: 5.06, 5.07, 5.08(a), 5.09(a)(b)(c), 5.10(a), 5.12(a), 5.13
- (d) **ACHTUNG!** Im Buch steht, dass eine Verteilungsfunktion stetig ist. Dies ist im Allgemeinen falsch. Sie sind aber rechtsstetig, das ist etwas wie halbstetig. Wir werden uns mit diesen Eigenschaften nicht viel befassen; die meisten Verteilungsfunktionen, die wir sehen werden, sind entweder diskret (wie beim Würfel) oder stetig. Für Details: bitte in der Pause nachfragen.

Normalverteilung mit MW μ und Standardabweichung σ hat Dichte $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Wenn X (μ, σ) -verteilt ist, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (0,1)-verteilt, also standard normalverteilt.

Unterlagen auf www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html

¹Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Die Buchaufgaben, die wir hatten

1.20, 1.27(a)(c)(e), 1.28(a), 1.30(a), 1.31(a), 1.33(b), 1.35(a), 1.36(a)(g)(h), 1.37(a)(b), 1.38(a)(c), 1.39(a)(b), 1.40(a)(b), 1.41(a); GK-Aufgaben 1.51 bis 1.61; 2.03(a), 2.04(e), 2.06(a), 2.07(a)(b), 2.11; 2.15, 2.17(a), 2.21, 2.26; 2.27, 2.33 und 2.37, 2.39, 2.40, 2.41, 2.44. 2.49, 2.50, 2.55; 2.57, 2.58, 2.59, 2.60(a), 2.62(a), 2.63(a)(c), 2.64(e), 2.65. 2.62(a), 2.63(a)(c), 2.64(e), 2.65; 2.75, 2.79, 2.81, 3.84; 12.23, 12.25, 12.27, 12.28, 12.29, 12.30, 12.31. 3.10(a), 3.12(c). 3.14(d), 3.17, 3.18(a)(b)(c)(d). 3.24 bis 3.29. 4.02, 4.03. 4.12(a), 4.14, 4.16, 4.18(a), 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.25, 4.26, 4.29, 5.01, 5.02, 5.03. 5.05, 5.06, 5.07, 5.08(a), 5.09(a)(b)(c), 5.10(a), 5.12(a), 5.13.

Physikbeispiele für Wahrscheinlichkeiten

Manchmal ist es nicht möglich, alle Fragen zu beantworten. Diese Idee ist vielleicht etwas neu, aber es gibt ungute Fragen. In der Mathematik gibt es viele, die ganz trivial sind: Ist eine Zahl blau? Bei bestimmten Wahrscheinlichkeiten ist es nicht immer so eindeutig. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkürlich auf der Straße ausgewählte Person genau so groß ist wie ich? Wie genau wurde hier gemessen? Wenn wir genau genug messen, dann finden wir immer einen Höhenunterschied. Also ist die Wahrscheinlichkeit Null, außer, wir wählen uns selbst, was natürlich nicht willkürlich wäre. Innerhalb der Mathematik gibt es keine Methode, zu entscheiden, welche Phänomene mit welcher Wahrscheinlichkeiten zusammenpassen. Diese Frage haben mit Physik, Biologie, Chemie oder was auch immer zu tun. Die Mathematik liefert nur bestimmte Methoden, um Modelle zu machen. Wir bieten mit der Mathematik eine Methode eine Realität abzubilden. Mit den folgenden Aufgaben versuche ich die Notwendigkeit der Erweiterung der Wahrscheinlichkeitstheorie zu zeigen.

ZERFALL. Nehmen wir an, wir haben einen Behälter mit einem Uranatom, das zerfallen kann. Die Frage „Was ist die Wahrscheinlichkeit $P(t)$, dass das Atom zur Zeit t zerfällt?“ lässt sich außer mit Null nicht beantworten! Denn die Summe aller $P(t)$ sollte 1 sein, aber es gibt zu viele Zeitpunkte t ! Auch aus physikalischer Sicht ist es sinnlos. Besser können wir fragen: Wie wahrscheinlich ist es, dass das Atom zwischen Null und t zerfallen ist? Also, sei $P(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom im Intervall $[0; t]$ zerfällt.

Aufgabe 1.

- Leite aus der Definition von $P(t)$ die Wahrscheinlichkeit $p(a; b)$ ab, die wie folgt definiert ist: $p(a; b)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Atom im Intervall $[a; b]$ zerfällt.
- Was sollte $P(\infty)$ sein? Was sollte $P(0)$ sein?
- Begründe, dass auf formaler Ebene $p(t; t + dt) = P'(t)dt$ gelten sollte. Hinweis: Zuerst mal mit Δt probieren.
- Mit etwas mehr Physik kann man Folgendes begründen: $f(t) = P'(t) \sim e^{-\lambda t}$, wobei $\lambda > 0$ von der Sorte des Atoms abhängt. Nimm als Ansatz $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ und bestimme C . Finde dann auch $P(t)$. Finde dann auch $p(a; b)$.

Schnelle Moleküle. Auch bei der Geschwindigkeit einer großen Menge an Gasmolekülen hat es keinen Sinn, nach der Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Geschwindigkeit zu fragen. Eher ist die Frage, wie wahrscheinlich ist es, dass ein bestimmtes, willkürlich ausgewähltes Molekül eine Geschwindigkeit im Intervall $[v; v + \Delta v]$ hat, recht interessant.

Aufgabe 2. Aus physikalischen Gründen kann man sagen, dass $f(v) = Cv^2e^{-av^2}$ die Dichtefunktion ist. Hierbei ist a eine positive Konstante, die vom Gas und von der Temperatur abhängt.

- Nimm zuerst $a = \frac{1}{2}$ und bestimme dann C . Hinweis: Partielle Integration.
- Finde einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich ausgewähltes Molekül eine Geschwindigkeit kleiner v_m hat. Also: Finde $P(v \in [0; v_m])$.
- Die Frage, welche Geschwindigkeit ist am wahrscheinlichsten, hat keinen Sinn. Wie würdest du das Maximum von f interpretieren? Finde auch dieses Maximum und skizziere den Graphen von f .
- Begründe, dass $P(v \in [0; x])$ eine monoton wachsende Funktion in x ist.
- Die Dichtefunktion f hat auch eine statistische Interpretation: Wenn wir alle Moleküle im Gas betrachten, hat ein Anteil von $\int_a^b f(v)dv$ eine Geschwindigkeit im Intervall $[a; b]$. Daher auch der Name Verteilungsfunktion. Bestimme jetzt ein symmetrisches Intervall um das Maximum von f , sodass 50% der Moleküle eine Geschwindigkeit in diesem Intervall hat.