# Planungsblatt Mathematik für die 4B

Woche 38 (von 05.06 bis 09.06)

## Hausaufgaben [1]

**Bis Montag 05.06:**
Verusche die folgende Aufgabe:
Viele Menschen suchen oder suchten nach einer Struktur in den Primzahlen; wo befinden sie sich, und wo nicht? Gibt es eine Regelmäßigkeit? Bis jetzt schaut es aus, als würde keine Struktur oder Regelmäßigkeit dahinter sein. Aber folgende Aussage ist recht interessant: Die Lücke zwischen zwei auf einander folgenden Primzahlen kann beliebig groß werden, also, nenne eine große Zahl, dann existiert irgendwo in den natürlichen Zahlen eine Kette mit dieser Länge, ohne dass Primzahlen dabei sind. Beweisen wir das einmal!
(a) Sei für jede natürliche Zahl $n$ die Zahl $P(n)$ das Produkt aus den ersten $n$ natürlichen Zahlen – ohne Null. Also $P(1) = 1$, $P(2) = 1 \cdot 2$, $P(3) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, usw. Berechne du jetzt $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$. Für $P(10)$ kann man auch einen TR benutzen, benutze dazu das Ausrufezeichen: $x! = P(x)$.
(b) Zeige, dass die Zahl $P(n)$ durch alle natürlichen Zahlen von 1 bis $n$ teilbar ist. Hinweis: Kontrolliere das zuerst für einige natürliche Zahlen.
(c) Zeige, dass (für $n \geq 5$) $P(n)+2$ durch 2 teilbar ist, dass $P(n)+3$ durch drei teilbar ist, dass $P(n)+4$ durch 4 teilbar ist, dass $P(n)+5$ durch 5 teilbar ist. Hinweis: Beispiel: $P(10)+7 = 1\cdot2\cdot3\cdots10+7 = 7X+7 = 7(X+1)$ wobei $X$ das Produkt der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ist – also 1 bis 10 ohne 7. Noch ein Beipsiel $P(5)+3 = 1\cdot2\cdot3\cdot4+\cdot5+3 = 3(1\cdot2\cdot4\cdot5)+3 = 3(1\cdot2\cdot4\cdot5+1)$.
(d) Zeige, dass für jede große Zahl $N$ die Reihe $P(N)+2, \ldots P(N)+N$ eine Kette von $N-1$ auf einander folgende Zahlen ohne Primzahlen ist.

## Kernbegriffe dieser Woche:

$\pi$, Kreis, Umfang, Fläche, Kreissektor, Kreissegment, Kreisbogen, Kegel, Kugel, Zylinder, Dreiecke, Beweismethoden

## Ungefähre Wochenplanung

**Schulübungen**.
**(a)** Freitag (2.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Jahresrückblick und Vorausblick, (iii) Beweismethoden und Referate (?)

**Unterlagen auf** `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

## BEWEISEN in der MATHEMATIK —— einige erste Schritte

**Dieser Text** ist nur ein kleiner Wegbereiter und ein klein ausgefallenes Hilfsmittel, um euch das Beweisen etwas näher zu bringen. Beweise spielen in der Mathematik eine große Rolle; in der Wissenschaft im Allgemeinen auch. Überall im Leben wirst du aber ab und zu mit einer Nachfrage, warum etwas wohl so ist, konfrontiert sein. Bei der Matura spielen Begründungen zwar eine Rolle, nur ist diese Rolle nicht essentiell. Jedoch gehört zur Allgemeinbildung in der AHS auch der Umgang mit Begründungen. Darum dieser Text.

**Warum** sind in der Mathematik Beweise so wichtig? Die Mathematik beschäftigt sich häufig mit Themen, die nicht immer unserer Vorstellung zugänglich sind. Und auch wenn wir uns etwas vorstellen können, so gibt es immer wieder sogenannte Widersprüche (Paradoxen), die eben genau auf Fehler in unserer Vorstellung zurückzuführen sind. Wir Menschen nehmen halt gerne das eine oder andere an. Die Natur der Aussagen in der Mathematik erfordert auch etwas andere Begründungen. So kann man mit einer Skizze relativ leicht begründen, dass ein Dreieck (in der Ebene) Winkelsumme 180 Grad haben muss. Aber das stimmt dann doch eigentlich nur für das skizzierte Dreieck, oder? Und gerade wenn man sich überzeugt fühlt, dass die Aussage wirklich ganz allgemein ist, kommt jemand mit den Dreiecken auf einer Kugel, die größere Winkelsummen haben. Wo genau im Beweis wurde benutzt, dass unser Dreieck in der Ebene liegt, und nicht auf einer Kugel? Das ist eine schwierige Frage! Genau um diese Fragen beantworten zu können, und um also Probleme zu vermeiden, die dazu führen, dass unsere Aussagen fast immer unwahr sind, muss ein Mathematiker die Beweise gut verstehen, sie selbst auch machen, und sie immer wieder hinterfragen können.

**Axiome** sind die Basissteine in der Mathematik. Über bestimmte Thesen wird nicht diskutiert; sie sind sozusagen Teil von der Definition eines Teilgebiets in der Mathematik. Die ganze Geometrie der alten Griechen (Ebene Geometrie) kann man auf einigen Axiomen gründen. Von den Definitionen und Axiomen ausgehend sind alle Sätze aus der Schulmathematik im Gebiet der Geometrie zu beweisen. Jetzt werde ich diese Axiome nicht herzaubern, denn sie sind ein Kunstwerk der Abstraktion. Ein Axiom verdient aber etwas Überlegung: Das Parallelitätsaxiom besagt, dass parallele Geraden sich nicht schneiden, und dass nicht parallele Geraden sich in genau einem Punkt schneiden. Wenn man sich den normalen Beweis zur Winkelsumme eines Dreiecks überlegt, wird hier in einem Schritt im Beweis eine parallele Gerade benutzt. Genau bei diesem Schritt benutzt man Geometrie der Ebene, und dieser Schritt ist auf einer Kugel nicht zulässig: Erstens, was ist parallel, und zweitens, stell dir vor, am Äquator stehen zwei Flugzeuge 1 Kilometer aus einander und beide fliegen nach dem Start genau in Richtung Nord, also sie fliegen parallel; dann treffen die beiden sich am Nordpol. . . Parallelität auf der Kugel ist mal anders, denn hier schneiden sich zwei „Geraden“ immer. Das Wort Gerade habe ich in Anführungszeichen geschrieben, denn was ist eigentlich eine Gerade? Auf der Kugel erfordert die Definition etwas mehr Überlegung.

**AUFGABE (A)**: Wiederhole den Beweis, dass die Winkelsumme in einem Dreieck 180 Grad ist, und schreibe jeden Schritt deutlich (und nummeriert) auf. Was sind die Annahmen? Warum gilt jeder Schritt? Wo wird Parallelität benutzt?

In der Geometrie sind die Beweise noch überschaubar. In der Algebra sind sie meistens auch nicht so kompliziert, auf jeden Fall in der Schule nicht. Aber beim Thema der Funktionen, oder bei den Eigenschaften der reellen Zahlen können Beweise recht viel Kreativität erfordern. Nicht nur das, sondern auch viel Abstraktion! Und da liegt das Problem. Ein guter Mathematiker muss nicht nur sehr kreativ sein, und anders denken könnnen, er muss auch sehr abstrakt denken können, und mit komplizierten Definitionen zurecht kommen. Eine wirkliche Kunst also. Wo der Denkprozess kreativ ist, ist aber das Produkt, der Beweis, so aufzuschreiben, dass alle die Argumente für richtig halten. Somit ist der Beweis strukturiert aufzuschreiben, sodass er auch wirklich überzeugend ist; den Beweis schreibst du nicht für dich, sondern für den Rest der Welt – ob es ihn jetzt interessiert oder nicht.

In diesem Schreiben werde ich höchstens ein paar Tricks und Ideen anführen können, sodass du dich in mathematischer Kreativität üben kannst. Zur gleichen Zeit werde ich dich dazu zwingen, die Beweise strukturiert aufzuschreiben. Auch die kreativste Idee muss man genau aufschreiben – eine zusätzliche Schwierigkeit, die aber sehr viel Spaß bereiten kann, und auch für dich als Kontrolle dient.

**Beispiele** sind immer wichtig. Wir beweisen den folgenden Satz: *Sind $a$ und $b$ zwei positive reelle Zahlen, so ist das arithmetische Mittel niemals kleiner als das geometrische Mittel. In Formeln: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.* Stärker noch: Gleichheit tritt nur auf, wenn die Zahlen identisch sind.

Hinweis 1: Im Satz steht, dass der Satz für positive Zahlen gilt, und man sieht dies auch, denn sonst wäre die Wurzel nicht definierbar. Beim Wort positiv muss man immer aufpassen, und es muss einem dann einfallen, dass Quadrate immer nichtnegativ sind.

Hinweis 2: Man sieht, dass die Formel übersichtlicher als die Aussage in Worten ist. Versuche aber trotzdem die Formel mal anders aufzuschreiben. Zum Beispiel: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, oder sogar $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.

Nun haben wir es. Die letzte Form der Formel sollte uns an etwas erinnern – die Binomialformel! Nur ist diese von der Form $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$. Kann man aber $x$ und $y$ geschickt wählen, sodass unsere Aussage entsteht? Jawohl! Wir wählen einfach $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$. Denn dann $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = a + b - 2\sqrt{ab}$. Und dann? Wie gesagt, ein Quadrat ist niemals negativ. Also, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Daraus folgt dann die Behauptung. Wie schaut dann ein Beweis aus?

- Das Quadrat jeder Zahl ist nichtnegativ, also gilt für alle positiven $a$ und $b$, dass $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
- Ausmultiplizieren liefert $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.
- Mittels kleiner Umformungen $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dies beweist die Formel.
- In obigen Umformungen gilt Gleichheit nur dann, wenn in der ersten Zeile auch Gleichheit gilt, also $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, also $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, aber dann muss $a = b$. Dies beweist die verstärkte Aussage.

**AUFGABE (A)** Im obigen Beweis wurden einige Schritte gemacht, die eventuell dich eine Begründung brauchen. Welche sind diese? Und könntest du dafür Begründungen geben?

In der Algebra sind die Aussagen ab und zu etwas abstrakter, aber dafür sind die Beweise relativ leicht verständlich, auf jeden Fall in der Schule. So gibt es mehrere Beweise, die durch Berechnungen erledigt werden können. Zum Beispiel folgt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus dem allgemeineren Behauptung $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ indem man $c = a$ und $d = b$ wählt.

**AUFGABE (C)** Beweise analog, mit eventuell mehreren Schritten, dass $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Hinweis: beweise zuerst ähnliche Ausdrücke für $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$.

Manche Beweise sind aber recht knifflig, vor allem, wenn allgemeine Eigenschaften von Zahlen erwünscht sind. Ich gebe zuerst zwei Beispiele: Beweisen wir zuerst, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Nun, dann gäbe es eine endliche Liste mit Primzahlen, also $L = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, wobei $n$ also die Anzahl der Primzahlen andeutet. Betrachten wir die Zahl $X = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Diese Zahl ist größer als alle Zahlen in der Liste $L$, somit kann sie keine Primzahl sein. Wir sehen aber auch, dass $X$ nicht durch $p_1$ teilbar ist, denn der Rest bei Division durch $p_1$ ist genau 1, weil $X = p_1(p_2 \cdots p_n) + 1$, also $X$ ist ein Vielfaches von $p_1$ plus 1, also ist $X$ nicht durch $p_1$ teilbar. Aber ähnlicherweise ist $X$ dann auch nicht teilbar durch $p_2$, und sogar durch keine einzige Primzahl aus der Liste $L$. Da $X$ keine Primzahl sein kann, muss aber $X$ noch durch eine andere Zahl teilbar sein, und sogar muss $X$ dann durch eine Primzahl teilbar sein, denn entweder eine Zahl ist eine Primzahl, oder sie ist teilbar durch eine Primzahl. Nun aber, das bedeutet dann, dass unsere Liste nicht vollständig ist; entweder ist $X$ eine Primzahl, oder $X$ ist durch eine Primzahl teilbar, welche also nicht in $L$ stehen kann. Somit erreichen wir einen Widerspruch. Die Annahme, es gibt nur endlich viele Primzahlen führt also zu einem Widerspruch, also ist die Annahme falsch.

Ein anderes Beispiel: Zwischen zwei Bruchzahlen liegen unendlich viele andere Bruchzahlen. Hier gehen wir einfach vor. Seien $a$ und $b$ zwei Bruchzahlen mit $a < b$, dann ist die Zahl $X = \frac{a+b}{2}$ eine Bruchzahl, denn sie ist das Ergebnis der Division der Summe zweier Bruchzahlen durch zwei, und die Summe zweier Bruchzahlen ist eine Bruchzahl, und die Hälfte einer Bruchzahl ist auch wieder eine Bruchzahl. Die Zahl $X$ erfüllt $a < X < b$. Somit liegt zwischen zwei Bruchzahlen immer eine andere Bruchzahl. Nun liegt also zwischen $a$ und $X$ wieder eine Bruchzahl $X_1$, und zwischen $a$ und $X_1$ liegt wieder eine, und so fort und so weiter. Somit gibt es keine Grenze an der Anzahl der Bruchzahlen zwischen zwei Bruchzahlen.

**AUFGABE (D)** Warum funktioniert der letze Beweis nicht für ganze Zahlen?

Ein klassiker ist der folgende Beweis, und damit werde ich zuerst diesen Text abschließen. Die Wurzel von 2 ist keine Bruchzahl. Diese Aussage bedeutet also, dass es keine zwei natürliche Zahlen $a$ und $b$ gibt, sodass $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Da wir Bruchzahlen immer kürzen können, dürfen wir annehmen, dass $a$ und $b$ keinen gemeinsamen Teiler haben. Nun, falls $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, dann $\frac{a^2}{b^2} = 2$, also $a^2 = 2b^2$. Somit ist das Quadrat von $a$ gerade. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl auch ungerade ist, muss also $a$ gerade sein, also $a$ ist durch zwei teilbar. Daher dürfen wir schreiben $a = 2c$, wobei $c = a : 2$, was wiederum eine natürliche Zahl ist, weil $a$ gerade sein muss. Somit gilt laut Annahme $\frac{2c}{b} = \sqrt{2}$. Wiederum quadrieren wir und finden $\frac{4c^2}{b^2} = 2$ also $4c^2 = 2b^2$, also $2c^2 = b^2$. Aber dann – wichtig oh wichtig – muss also $b^2$ gerade sein, und somit auch $b$ selbst. Aber das ist ein Widerspruch, denn $a$ war schon durch 2 teilbar, und wenn $b$ das auch ist, dann haben $a$ und $b$ also einen gemeinsamen Nenner, aber bei Bruchzahlen darf man ja immer zuerst kürzen! Und dann hätten wir den gemeinsamen Teiler 2 gekürzt. Das ist also Blödsinn! Die Annahme, es gäbe solche natürliche Zahlen $a$ und $b$, welche also gekürzt keinen gemeinsamen Teiler haben, mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ führt zu Unfug, somit muss die Annahme schon Unfug sein. Somit ist die Wurzel aus 2 eben keine Bruchzahl.

Der Beweis, dass $\pi$ auch keine Bruchzahl ist, ist schon furchtbar viel komplizierter und erforder viel mehr Kreativität. Beweise sind eben nicht immer einfach ... darum gibt es noch immer Mathematik als Wissenschaft und somit auch die Mathematiker.