Planungsblatt Mathematik für die 4B

Woche 39 (von 12.06 bis 19.06)

Hausaufgaben [1]

Bis Dienstag 14.06:
Mache die Aufgaben 1052 und 1053.

Bis Freitag 16.06:
Mache die folgende Aufgaben:
Zeichne eine Strecke AB mit Länge $x = 2cm$. Zeichne durch B eine Gerade g normal auf AB. Zeichne auf g Punkte C_1, C_2, C_3,..., sodass rechtwinkige Dreiecke ABC_n entstehen ($n = 1, 2, 3, \ldots$) mit $|AB| = x$, und $y_n = |BC_n| = n\ cm$. Miß jeweils den Winkel $\alpha_n = \angle BAC_n$ und mache eine Tabelle mit $\frac{y_n}{x}$ auf der einen Seite und α_n auf der anderen Seite. Wenn noch Zeit da, erstelle ein Diagramm mit α_n horizontal und $\frac{y_n}{x}$ vertikal abgetragen. Dann hast du den Graphen der Tangensfunktion!

Bis Montag 19.06:
Arbeite fleißig an den Aufgaben 1090, 1092, 1095, 1098, 1100, 1102, 1103, 1104

Kernbegriffe dieser Woche:

Beweismethoden und Mathematik von der fünften Klasse

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Montag (2.Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) die Beweise: einige der Aufgaben der letzten Woche erledigen, (iii) Induktion in der Mathematik. Zum Beweisen findest du hier unten auch etwas mehr zum Nachlesen.

(b) Dienstag (4.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Beweisemethoden zuerst mal erledigen, (iii) Ausblick und Rückblick: Was sind Sinus und Cosinus? Was ist $3^{1/2}$? Vorbereitung auf das, was kommt.

(c) Freitag (2.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Rückblick Statistik: Aufgaben 1090, 1092, 1095, 1098, 1100, 1102, 1103, 1104

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

BEWEISEN in der MATHEMATIK — einige erste Schritte

Dieser Text ist nur ein kleiner Wegbereiter und ein klein ausgefallenes Hilfsmittel, um euch das Beweisen etwas näher zu bringen. Beweise spielen in der Mathematik eine große Rolle; in der Wissenschaft im Allgemeinen auch. Überall im Leben wirst du aber ab und zu mit einer Nachfrage, warum etwas wohl so ist, konfrontiert sein. Bei der Matura spielen Begründungen zwar eine Rolle, nur ist diese Rolle nicht essentiell. Jedoch gehört zur Allgemeinbildung in der AHS auch der Umgang mit Begründungen. Darum dieser Text.

Warum sind in der Mathematik Beweise so wichtig? Die Mathematik beschäftigt sich häufig mit Themen, die nicht immer unserer Vorstellung zugänglich sind. Und auch wenn wir uns etwas vorstellen können, so gibt es immer wieder sogenannte Widersprüche (Paradoxen), die eben genau auf Fehler in unserer Vorstellung zurückzuführen sind. Wir Menschen nehmen halt gerne das eine oder andere an. Die Natur der Aussagen in der Mathematik erfordert auch etwas andere Begründungen. So kann man mit einer Skizze relativ leicht begründen, dass ein Dreieck (in der Ebene) Winkelsumme 180 Grad haben muss. Aber das stimmt dann doch eigentlich nur für das skizzierte Dreieck, oder? Und gerade wenn man sich überzeugt fühlt, dass die Aussage wirklich ganz allgemein ist, kommt jemand mit den Dreiecken auf einer Kugel, die größere Winkelsummen haben. Wo genau im Beweis wurde benutzt, dass unser Dreieck in der Ebene liegt, und nicht auf einer Kugel? Das ist eine schwierige Frage! Genau um diese Fragen beantworten zu können, und um also Probleme zu vermeiden, die dazu führen, dass unsere Aussagen fast immer unwahr sind, muss ein Mathematiker die Beweise gut verstehen, sie selbst auch machen, und sie immer wieder hinterfragen können.

Axiome sind die Basissteine in der Mathematik. Über bestimmte Thesen wird nicht diskutiert; sie sind sozusagen Teil von der Definition eines Teilgebiets in der Mathematik. Die ganze Geometrie der alten Griechen (Ebene Geometrie) kann man auf einigen Axiomen gründen. Von den Definitionen und Axiomen ausgehend sind alle Sätze aus der Schulmathematik im Gebiet der Geometrie zu beweisen. Jetzt werde ich diese Axiome nicht herzaubern, denn sie sind ein Kunstwerk der Abstraktion. Ein Axiom verdient aber etwas Überlegung: Das Parallelitätsaxiom besagt, dass parallele Geraden sich nicht schneiden, und dass nicht parallele Geraden sich in genau einem Punkt schneiden. Wenn man sich den normalen Beweis zur Winkelsumme eines Dreiecks überlegt, wird hier in einem Schritt im Beweis eine parallele Gerade benutzt. Genau bei diesem Schritt benutzt man Geometrie der Ebene, und dieser Schritt ist auf einer Kugel nicht zulässig: Erstens, was ist parallel, und zweitens, stell dir vor, am Äquator stehen zwei Flugzeuge 1 Kilometer aus einander und beide fliegen nach dem Start genau in Richtung Nord, also sie fliegen parallel; dann treffen die beiden sich am Nordpol. . . Parallelität auf der Kugel ist mal anders, denn hier schneiden sich zwei „Geraden“ immer. Das Wort Gerade habe ich in Anführungszeichen geschrieben, denn was ist eigentlich eine Gerade? Auf der Kugel erfordert die Definition etwas mehr Überlegung.

AUFGABE (A): Wiederhole den Beweis, dass die Winkelsumme in einem Dreieck 180 Grad ist, und schreibe jeden Schritt deutlich (und nummeriert) auf. Was sind die Annahmen? Warum gilt jeder Schritt? Wo wird Parallelität benutzt?

In der Geometrie sind die Beweise noch überschaubar. In der Algebra sind sie meistens auch nicht so kompliziert, auf jeden Fall in der Schule nicht. Aber beim Thema der Funktionen, oder bei den Eigenschaften der reellen Zahlen können Beweise recht viel Kreativität erfordern. Nicht nur das, sondern auch viel Abstraktion! Und da liegt das Problem. Ein guter Mathematiker muss nicht nur sehr kreativ sein, und anders denken könnnen, er muss auch sehr abstrakt denken können, und mit komplizierten Definitionen zurecht kommen. Eine wirkliche Kunst also. Wo der Denkprozess kreativ ist, ist aber das Produkt, der Beweis, so aufzuschreiben, dass alle die Argumente für richtig halten. Somit ist der Beweis strukturiert aufzuschreiben, sodass er auch wirklich überzeugend ist; den Beweis schreibst du nicht für dich, sondern für den Rest der Welt – ob es ihn jetzt interessiert oder nicht.

In diesem Schreiben werde ich höchstens ein paar Tricks und Ideen anführen können, sodass du dich in mathematischer Kreativität üben kannst. Zur gleichen Zeit werde ich dich dazu zwingen, die Beweise strukturiert aufzuschreiben. Auch die kreativste Idee muss man genau aufschreiben – eine zusätzliche Schwierigkeit, die aber sehr viel Spaß bereiten kann, und auch für dich als Kontrolle dient.

Beispiele sind immer wichtig. Wir beweisen den folgenden Satz: *Sind a und b zwei positive reelle Zahlen, so ist das arithmetische Mittel niemals kleiner als das geometrische Mittel. In Formeln:* $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Stärker noch: Gleichheit tritt nur auf, wenn die Zahlen identisch sind.

Hinweis 1: Im Satz steht, dass der Satz für positive Zahlen gilt, und man sieht dies auch, denn sonst wäre die Wurzel nicht definierbar. Beim Wort positiv muss man immer aufpassen, und es muss einem dann einfallen, dass Quadrate immer nichtnegativ sind.

Hinweis 2: Man sieht, dass die Formel übersichtlicher als die Aussage in Worten ist. Versuche aber trotzdem die Formel mal anders aufzuschreiben. Zum Beispiel: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, oder sogar $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.

Nun haben wir es. Die letzte Form der Formel sollte uns an etwas erinnern – die Binomialformel! Nur ist diese von der Form $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$. Kann man aber x und y geschickt wählen, sodass unsere Aussage entsteht? Jawohl! Wir wählen einfach $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$. Denn dann $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = a + b - 2\sqrt{ab}$. Und dann? Wie gesagt, ein Quadrat ist niemals negativ. Also, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Daraus folgt dann die Behauptung. Wie schaut dann ein Beweis aus?

- Das Quadrat jeder Zahl ist nichtnegativ, also gilt für alle positiven a und b, dass $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.
- Ausmultiplizieren liefert $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$.
- Mittels kleiner Umformungen $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dies beweist die Formel.
- In obigen Umformungen gilt Gleichheit nur dann, wenn in der ersten Zeile auch Gleichheit gilt, also $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, also $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, aber dann muss $a = b$. Dies beweist die verstärkte Aussage.

AUFGABE (A) Im obigen Beweis wurden einige Schritte gemacht, die eventuell dich eine Begründung brauchen. Welche sind diese? Und könntest du dafür Begründungen geben?

In der Algebra sind die Aussagen ab und zu etwas abstrakter, aber dafür sind die Beweise relativ leicht verständlich, auf jeden Fall in der Schule. So gibt es mehrere Beweise, die durch Berechnungen erledigt werden können. Zum Beispiel folgt $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus dem allgemeineren Behauptung $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ indem man $c = a$ und $d = b$ wählt.

AUFGABE (C) Beweise analog, mit eventuell mehreren Schritten, dass $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Hinweis: beweise zuerst ähnliche Ausdrücke für $(a+b)^3$ und $(a+b)^4$.

Manche Beweise sind aber recht knifflig, vor allem, wenn allgemeine Eigenschaften von Zahlen erwünscht sind. Ich gebe zuerst zwei Beispiele: Beweisen wir zuerst, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Nun, dann gäbe es eine endliche Liste mit Primzahlen, also $L = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, wobei n also die Anzahl der Primzahlen andeutet. Betrachten wir die Zahl $X = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Diese Zahl ist größer als alle Zahlen in der Liste L, somit kann sie keine Primzahl sein. Wir sehen aber auch, dass X nicht durch p_1 teilbar ist, denn der Rest bei Division durch p_1 ist genau 1, weil $X = p_1(p_2 \cdots p_n) + 1$, also X ist ein Vielfaches von p_1 plus 1, also ist X nicht durch p_1 teilbar. Aber ähnlicherweise ist X dann auch nicht teilbar durch p_2, und sogar durch keine einzige Primzahl aus der Liste L. Da X keine Primzahl sein kann, muss aber X noch durch eine andere Zahl teilbar sein, und sogar muss X dann durch eine Primzahl teilbar sein, denn entweder eine Zahl ist eine Primzahl, oder sie ist teilbar durch eine Primzahl. Nun aber, das bedeutet dann, dass unsere Liste nicht vollständig ist; entweder ist X eine Primzahl, oder X ist durch eine Primzahl teilbar, welche also nicht in L stehen kann. Somit erreichen wir einen Widerspruch. Die Annahme, es gibt nur endlich viele Primzahlen führt also zu einem Widerspruch, also ist die Annahme falsch.

Ein anderes Beispiel: Zwischen zwei Bruchzahlen liegen unendlich viele andere Bruchzahlen. Hier gehen wir einfach vor. Seien a und b zwei Bruchzahlen mit $a < b$, dann ist die Zahl $X = \frac{a+b}{2}$ eine Bruchzahl, denn sie ist das Ergebnis der Division der Summe zweier Bruchzahlen durch zwei, und die Summe zweier Bruchzahlen ist eine Bruchzahl, und die Hälfte einer Bruchzahl ist auch wieder eine Bruchzahl. Die Zahl X erfüllt $a < X < b$. Somit liegt zwischen zwei Bruchzahlen immer eine andere Bruchzahl. Nun liegt also zwischen a und X wieder eine Bruchzahl X_1, und zwischen a und X_1 liegt wieder eine, und so fort und so weiter. Somit gibt es keine Grenze an der Anzahl der Bruchzahlen zwischen zwei Bruchzahlen.

AUFGABE (D) Warum funktioniert der letze Beweis nicht für ganze Zahlen?

Ein klassiker ist der folgende Beweis, und damit werde ich zuerst diesen Text abschließen. Die Wurzel von 2 ist keine Bruchzahl. Diese Aussage bedeutet also, dass es keine zwei natürliche Zahlen a und b gibt, sodass $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Da wir Bruchzahlen immer kürzen können, dürfen wir annehmen, dass a und b keinen gemeinsamen Teiler haben. Nun, falls $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, dann $\frac{a^2}{b^2} = 2$, also $a^2 = 2b^2$. Somit ist das Quadrat von a gerade. Da das Quadrat einer ungeraden Zahl auch ungerade ist, muss also a gerade sein, also a ist durch zwei teilbar. Daher dürfen wir schreiben $a = 2c$, wobei $c = a : 2$, was wiederum eine natürliche Zahl ist, weil a gerade sein muss. Somit gilt laut Annahme $\frac{2c}{b} = \sqrt{2}$. Wiederum quadrieren wir und finden $\frac{4c^2}{b^2} = 2$ also $4c^2 = 2b^2$, also $2c^2 = b^2$. Aber dann – wichtig oh wichtig – muss also b^2 gerade sein, und somit auch b selbst. Aber das ist ein Widerspruch, denn a war schon durch 2 teilbar, und wenn b das auch ist, dann haben a und b also einen gemeinsamen Nenner, aber bei Bruchzahlen darf man ja immer zuerst kürzen! Und dann hätten wir den gemeinsamen Teiler 2 gekürzt. Das ist also Blödsinn! Die Annahme, es gäbe solche natürliche Zahlen a und b, welche also gekürzt keinen gemeinsamen Teiler haben, mit $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ führt zu Unfug, somit muss die Annahme schon Unfug sein. Somit ist die Wurzel aus 2 eben keine Bruchzahl.

Der Beweis, dass π auch keine Bruchzahl ist, ist schon furchtbar viel komplizierter und erforder viel mehr Kreativität. Beweise sind eben nicht immer einfach ... darum gibt es noch immer Mathematik als Wissenschaft und somit auch die Mathematiker.

BEWEISEN in der MATHEMATIK — **2: vollständige Induktion**

Vollständige Induktion ist eine interessante und effektive Beweisemethode für viele Probleme in der Mathematik. Oft geht es hier um Formeln, die für natürliche Zahlen gelten.

Zuerst mal ein einfaches Beispiel: Ein regelmäßiges n-Eck hat Winkelsumme $(n-2)\cdot 180$, falls $n > 2$. Bemerke, dass die Aussage nicht funktionieren kann, wenn $n = 1$ oder 2. Nun dann der Beweis auf Induktionsmethode.

(A) Zuerst beweisen wir den Satz für den ersten Fall (ab und zu sogar für die erste paar Fälle). Hier heißt das, dass wir für $n = 3$. Tatsächlich gilt $(3-2)\cdot 180 = 180$ und ja, ein Dreieck hat Winkelsumme 180 Grad. Also, für $n = 3$ stimmt die Formel. Nun, für ein regelmäßiges Viereck können wir durch Einzeichnen einer Diagonalen einsehen, dass wir zwei Dreiecke haben, und 180+ 180 ist wiederum 360 und auch hier $(4-2)\cdot 180 = 360$. Für ein Fünfeck geht es ähnlich; durch Einzeichnen einer Diagonalen reduzieren wir das Problem auf das vorige! Das heißt auch, dass die Aussage für ein regelmßiges Zehneck stimmt, falls es für ein regelmäßiges Neuneck stimmt, denn auch hier können wir ja eine Diagonale einzeichnen! Diese Idee ist dann wichtig für den nächsten Schritt:

(B) Wir nehmen an, dass die zu beweisene Aussage stimmt für $n = 1, 2, \ldots, k$, also für die ersten k natürlichen Zahlen, und beweisen dann, dass es auch für die nächste, also $k+1$ gilt. Zu unserem Beispiel: Stellen wir uns mal vor, die Aussage stimmt für alle regelmäßigen 3-Ecken, 4-Ecken, und so weiter bis zu den k-Ecken. Nun, was ist dann mit einem regelmäßigen $(k+1)$-Eck? Hier zeichnen wir eine Diagonale so ein, dass ein Dreieck abgetrennt wird. Wir haben dann also unser $(k+1)$-Eck in ein k-Eck und in ein Dreieck zerlegt. Die Zerlegung erzeugt keine neue Winkel im Inneren der Figur, uns somit ist die Winkelsumme die Summe der Winkelsummen des Dreiecks und des k-Ecks. Sprich, die Winkelsumme des $(k+1)$-Ecks ist $180 + (k-2)\cdot 180 = (k-1)\cdot 180$ – kontrolliere diesen algebraischen Schritt. Die Formel sagt für $n = k+1$ voraus, dass die Winkelsumme $(k+1-2)\cdot 180 = (k-1)\cdot 180$ sein sollte. Das ist also auch wieder richtig! Somit ist unsere Formel auch für $k+1$ richtig.

Ich behaupte, jetzt sind wir fertig! Warum? Ganz einfach:

(C) Die Formel ist wegen (A) richtig für $n = 1$. Wenn wir dann Schritt B anwenden für $k = 1$, dann ist die Formel auch richtig für $n = 2$. Wenn wir dann wieder Schritt (B) anwenden, jetzt für $k = 2$, dann sehen wir, dass die Formel für $n = 3$ gültig ist. Und so geht es weiter.

Für die, die nicht so schnell überzeugt sind, hier etwas Erklärung, die man zuerst skippen darf: Der wirkliche Beweis, dass diese Methode funktioniert, ist eigentlich recht toll. Hier geht es: Stelle dir vor, sie funktioniere nicht. Dann muss es also einige natürliche Zahlen a_1, a_2, a_3, … geben, für welche unsere Formel falsch ist. Nun wissen wir, dass alle diese natürliche Zahlen, für welche die Formel falsch ist, größer als 3 sein müssen, weil das bei (A) ausgeschlossen wurde. Andererseits können wir natürliche Zahlen ordnen, nach ihrer Größe, und dann sehen wir, dass es eine kleinste natürliche Zahl a geben muss, für welche die Formel nicht stimmt. Die Lage ist dann also die folgende: von 3 bis $a-3$ stimmt die Formel, und die Formel ist falsch für a, und danach, tschja, das wissen wir noch nicht. Bemerke, dass wegen $a > 3$ gilt dass $a - 1 \geq 3$, also mindestens einmal ist die Formel auch richtig. Aber, und das ist der Knackpunkt, diese Lage darf nicht sein. Denn die Formel stimmt also für $n = 3, 4, \ldots, a-1$, und dann können wir wegen Schritt (B) sagen, dass die Formel auch für $n = a$ gelten muss! Dieser Widerspruch kann nur gelöst werden, falls diese Situation nicht eintritt; einzelne Fälle, wo die Formel nicht stimmt, existieren nicht, und die Formel ist gültig für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alle Schritte nochmals für das folgende Problem:

Beweise, dass $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Also, in Worten, die Summe der ersten n natürlichen Zahlen größer gleich 1 ist dem Mittelwert aus n^2 und n gleich.

(A) Falls $n = 1$, dann steht auf der linken Seite nur 1. Auf der rechten Seite steht dann auch 1. Also für diesen Fall stimmt die Formel. Kontrolliere selbst mal für $n = 2$.

(B) Nehmen wir an, die Formel stimme für die ersten k Zahlen, also, für $n = 1, 2, \ldots, k$. Ich bearbeite mal die linke Seite für $k + 1$ und finde

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1)$$

und wegen der Annahme, die Formel stimme schon für $n = k$, wird das also

$$(1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{2k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}.$$

Nun mal die Formel, also die rechte Seite, für $n = k + 1$ kontrollieren:

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{k^2 + 2k + k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}.$$

Somit stimmt die Formel auch für den nächsten Fall, daher, per Induktion, für alle natürlichen Zahlen.

Das allgemeine Schema ist also: Zu beweisen ist eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen ab einer Minimumzahl n_0, oft 1, aber wie oben auch mal 3. Man beweist dann zuerst die Aussage $A(n_0)$ für diese Minimumzahl n_0. Dann folgt zuerst die Annahme, dass die Aussage für alle naürlichen Zahlen von n_0 bis k gilt, und beweist dann, dass auch $A(k + 1)$ eine wahre Aussage ist. Dann ist man fertig.

Zum Üben:

(a) Finde eine Formel für die Summe $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)$ der ersten $n + 1$ ungeraden Zahlen und beweise sie mit vollständiger Induktion.

(b) Finde eine Formel für die Summe $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ der ersten n geraden Zahlen und beweise sie mit vollständiger Induktion.

(*c*) Beweise die Identität $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ mit Induktion.

(*d*) Diese ist schön aber lästig: beweise $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.