

Wiederholung der ersten Schularbeit Mathematik Klasse 8A G
am 28. November 2016

SCHÜLERNAME: _____

Punkte im ersten Teil: _____

Punkte im zweiten Teil: _____

Davon Kompensationspunkte: _____

Note: _____

Notenschlüssel:

Falls die Summe der erzielten Kompensationspunkte im zweiten Teil und des ersten Teils weniger als 16 ist, so ist die Note **Nicht Genügend**. Falls diese Summe 16 oder mehr beträgt, dann wird folgender Notenschlüssel benutzt:

NOTENSCHLÜSSEL	
41 - 48 Punkte	Sehr Gut (1)
33 - 40 Punkte	Gut (2)
25 - 32 Punkte	Befriedigend (3)
16 - 24 Punkte	Genügend (4)

Aufgabe 1. (2P) Eigenschaften von Polynomfunktionen.

Der Graph der Polynomfunktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ berührt die x -Achse. Vervollständigen Sie den folgenden Satz, sodass er mathematisch korrekt ist!

Der Graph von f hat ① mit der x -Achse, daher gilt ②.

①	
einen gemeinsamen Punkt	<input type="checkbox"/>
keinen gemeinsamen Punkt	<input type="checkbox"/>
mehrere gemeinsame Punkte	<input type="checkbox"/>

②	
$b^2 = 4ac$	<input type="checkbox"/>
$b^2 > 4ac$	<input type="checkbox"/>
$b^2 < 4ac$	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 2. (2P) Unbestimmtes Integral.

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int (at^2 + e^{2a-t}) da$

Antwort:

Aufgabe 3. (2P) Bedeutungen.

Die Fahrzeit eines U-Bahn Zuges von der Station A zur Station B dauert 500 Sekunden. Die Funktion $v(t)$ stellt seine Geschwindigkeit t Sekunden nach Abfahrt bei Station A dar. Ordne den angeführten Termen ihre Bedeutung im oben beschriebenen Kontext zu.

$v'(25)$	
$v(25)$	
$\frac{v(25)-v(0)}{25}$	
$\frac{1}{25} \int_0^{25} v(t) dt$	

A	Geschwindigkeit nach 25 Sekunden.
B	Die maximale Beschleunigung in den ersten 25 Sekunden.
C	Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 25 Sekunden.
D	Beschleunigung nach 25 Sekunden.
E	Durchschnittliche Beschleunigung in den ersten 25 Sekunden.
F	Entfernung zwischen den Stationen A und B .

Aufgabe 4. (2P) Kosten.

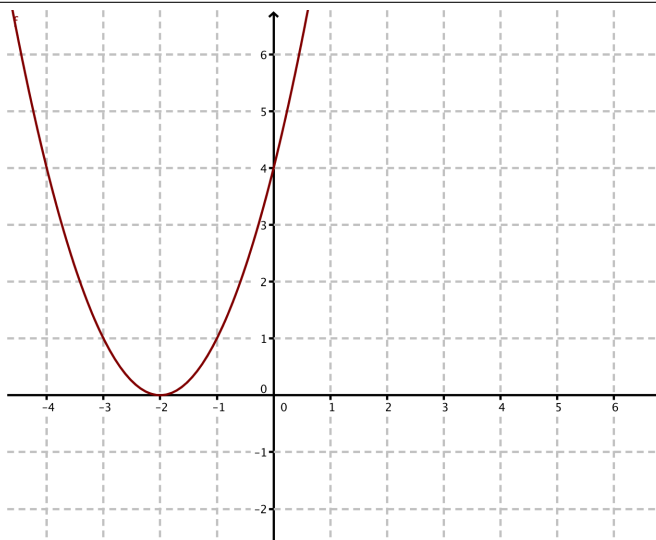
Die Kostenfunktion K in Abhängigkeit der Produktionsmenge x (in ME) wird durch folgende Funktionsvorschrift gegeben: $K(x) = \frac{1}{300}x^2 + 0,2x + 1000$. Bestimmen Sie eine Funktionsvorschrift für die Stückkostenfunktion und die Grenzkostenfunktion.

Stückkostenfunktion:

Grenzkostenfunktion:

Aufgabe 7. (2P) Stammfunktionen finden.

In der nebenstehenden Figur sehen Sie den Graph einer Funktion f . Kreuzen Sie bei den untenstehenden Figuren den zutreffenden Graphen einer Stammfunktion F von f an.



<p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></p>	<p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></p>
<p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></p>	<p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></p>
<p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></p>	<p style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></p>

Aufgabe 8. (2P) Keime in Kuhmilch.

Die Anzahl der Keime in Kuhmilch nimmt etwa um 1,5% pro Minute zu, wenn die Milch nicht gekühlt wird. Anfänglich seien 25.000 Keime pro ml vorhanden. Milch mit einer Keimzahl unter 100.000 pro ml entspricht der Güteklasse 1. Geben Sie einen Term ausdruck für die Anzahl $A(t)$ der Keime pro ml nach t Minuten an und bestimmen Sie, nach wie viel Minuten die Milch nicht mehr der Güteklasse 1 ist.

$A(t) =$ _____ ,

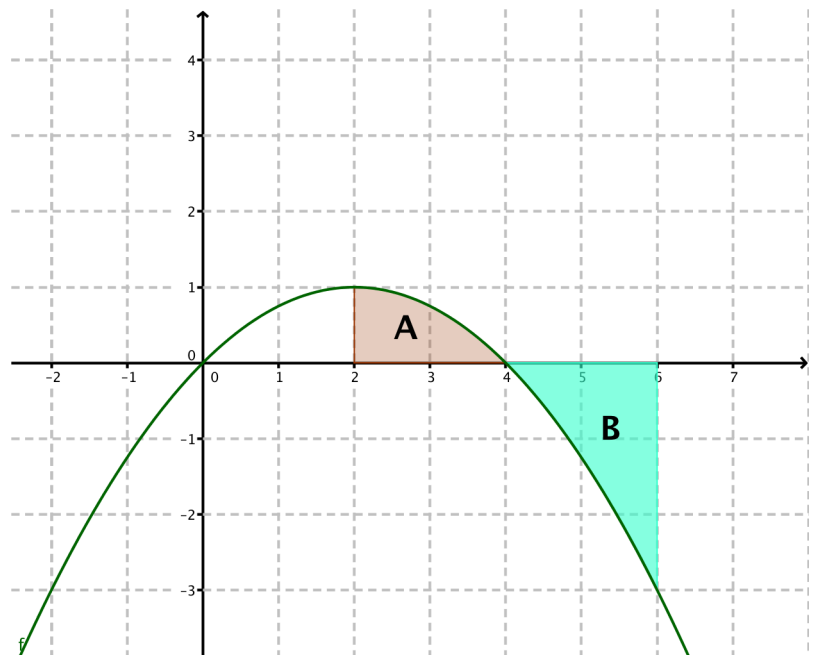
Nach $t =$ _____ Minuten ist die Milch nicht mehr der ersten Güteklasse.

Aufgabe 9. (2P) Fläche.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x(4 - x).$$

In der nebenstehenden Figur sehen Sie den Graphen und zwei markierte Flächen mit Flächeninhalten A und B .



Ordnen Sie jedem Ausdruck in A und B aus der linken Tabelle einen Integralausdruck aus der rechten Tabelle zu:

$A + B$	
$A - B$	
$B - A$	
A	

A	$\int_0^4 f(x)dx$
B	$\int_2^4 f(x)dx - \int_4^6 f(x)dx$
C	$ \int_2^6 f(x)dx $
D	$\int_2^6 f(x)dx$
E	$\int_2^4 f(x)dx$
F	$\int_4^6 f(x)dx$

Aufgabe 10. (2P) Aussagen zu Integralen.

Es sei f eine Funktion mit einer bestimmten Stammfunktion F . Kreuzen Sie die beiden im Allgemeinen zutreffenden Aussagen an!

$\int_0^x f(t)dt = F(x)$	<input type="checkbox"/>
$\int_0^x f(t)dt - F(x)$ ist konstant, m.a.W. unabhängig von x .	<input type="checkbox"/>
$F(x) = f'(x)$	<input type="checkbox"/>
$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$	<input type="checkbox"/>
$\int_a^b f(x)dx$ ist die Fläche zwischen x -Achse und dem Graphen von f im Intervall $[a; b]$	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 11. (2P) Terrassenpunkt.

Es sei f die kubische Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ und gegeben ist, dass an der Stelle $x = 1$ die Funktion f einen Terrassenpunkt hat. Bestimmen Sie a und b !

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

Aufgabe 12. (2P) Ermitteln einer periodischen Funktion.

Gegeben ist die Ableitung $f'(x) = 7 \cdot \sin(5x)$ einer periodischen Funktion f . Des Weiteren ist bekannt, dass $f(\frac{\pi}{10}) = 0,2$. Ermitteln Sie $f(x)$!

$$f(x) = \underline{\hspace{4cm}}$$

TEIL 2

SCHÜLERNAME: _____

Aufgabe 1. Reibung.

Wenn ein Fussball über einen Rasen rollt, bleibt die Geschwindigkeit des Balles nicht konstant, sondern nimmt wegen der Reibung ab. Im Falle eines gut gemähten Rasens lässt sich die Geschwindigkeit annäherungsweise durch die Formel

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-r \cdot t}, \quad v(0), r > 0$$

beschreiben, wobei $v(0)$ die Geschwindigkeit zu $t = 0$ (also die Anfangsgeschwindigkeit) ist, und die positive Zahl r von der Beschaffenheit des Balles und des Rasens abhängt. Nehmen wir $v(0) = 10 \text{ m/s}$ und $r = 0,2 \text{ s}^{-1}$. (Die Einheit von r ist Hz , also s^{-1} .)

- (a). (1 Kompensationspunkt) Geben Sie die Definition einer monoton fallenden Funktion.
- (b). (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $v(t)$ eine monoton fallende Funktion ist.
- (c). (3 Punkte) Geben Sie einen Termausdruck für das Integral $s(T) = \int_0^T v(t) dt$, interpretieren Sie den Term im Kontext, und zeigen Sie, dass $s(T)$ als Funktion von T monoton steigend ist.
- (d). (2 Punkte) Betrachten Sie die Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ und $\lim_{T \rightarrow \infty} s(T)$ und begründen Sie mithilfe dieser Grenzwerte, dass die angegebene Annäherung nicht für alle Zeiten gültig sein kann.

Aufgabe 2. Kugel & Kreis.

- (a). (1 Kompensationspunkt) Betrachten Sie folgende Zuordnungen:

(A) In einer Klasse mit 20 Personen werden den Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Namen der Personen der Klasse zugeordnet. Die Klasse wird sozusagen in 5 Gruppen aufgeteilt.

(B) Jeder Zahl $x \in [0, 1]$ werden die y -Werte zugeordnet, für welche $x^2 + y^2 = 1$ gilt.

Bei beiden Zuordnungen handelt es sich nicht um Funktionen. Erklären Sie, warum es sich hier nicht um Funktionen handelt!

- (b). (3 Punkte) Beweisen Sie die folgende Behauptung:

$$\text{Das Volumen einer Kugel mit Radius } R \text{ beträgt } \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$.

Aufgabe 3. Periodische Funktionen und Integrale.

(a). (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

Jede Stammfunktion F von $f(x) = \sin(x)$ ist periodisch.	<input type="checkbox"/>
$\int_{-a}^a \cos(x)dx = 0$ für alle $a > 0$.	<input type="checkbox"/>
$\int_0^\pi \sin(x)dx = 1$.	<input type="checkbox"/>
$\int_{-a}^a \sin(x)dx = 0$ für alle $a > 0$.	<input type="checkbox"/>
$\int \sin(kx)dx = -\frac{\cos(x)}{k}$ für alle $k > 0$.	<input type="checkbox"/>

(b). (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktionen $f_n(x) = \sin(nx)$. Geben Sie einen Ausdruck P_n für die Periode von f_n und geben Sie Term ausdrücke für die Integrale

$$T(n) = \int_0^{P_n/2} f_n(x)dx, \quad S(n) = \int_0^{P_n} f_n(x)dx, \quad U(n) = \int_0^{P_n/2} n f_n(x)dx.$$

(c). (3 Punkte) Die Funktionen $g(x) = a \sin(bx) + c$ sind periodisch, wobei a, b, c reelle Zahlen sind $a, b \neq 0$. Sei P_g die Periode so einer Funktion. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^{P_g} g(x)dx$$

unabhängig von a ist, geben Sie einen Term ausdrück für dieses Integral. Formulieren Sie eine Bedingung, welche a, b und c erfüllen müssen, damit die Stammfunktion von g auch periodisch ist. Finden Sie mindestens eine Wahl für a, b und c , sodass die Funktion g eine nicht-periodische Stammfunktion hat.

Aufgabe 4. NASA.

Die Erde zieht mit einer Kraft $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ an einem Körper mit Masse m , wobei $M \approx 5,97 \cdot 10^{24}kg$ die Masse der Erde, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11}Nm^2kg^{-2}$ Newtons Gravitationskonstante, und r die Entfernung des Körpers zum Erdmittelpunkt ist. Der Radius R der Erde beträgt $R \approx 6,68 \cdot 10^6$ Meter.

(1 Kompensationspunkt) Interpretieren Sie das Integral $W(h) = -\int_R^{R+h} \frac{GMm}{r^2}dr$ in diesem Kontext!

(2 Punkte) Die NASA will eine Rakete mit einer Masse von $m = 2,5 \cdot 10^5$ Kilogramm ins Weltall schicken, damit sie auf einer Höhe von etwa 35.786.000 Metern in einer geostationären Bahn um die Erde kreist. Berechnen Sie die Energiemenge, die dafür notwendig ist.

(1 Punkt) Ein Kilogramm Kerosin liefert eine Energie von 42 Megajoule, m.a.W., der Heizwert von Kerosin beträgt 42 MJ/kg. Berechnen Sie, wie viel Kilogramm Kerosin die Rakete mit an Bord haben muss.