Erste Schularbeit Mathematik Klasse 8A G am 23.11.2016

KORREKTUREN und HINWEISE

Aufgabe 1. (2P) **Funktionsklassen ihren Eigenschaften zuordnen**.

In der linken Tabelle sind vier Eigenschaften von Funktionen gegeben. In der rechten Tabelle sehen Sie Fynktionstypen, bei denen die Parameter a, b, und c beliebige, reelle Zahlen annehmen können. Ordnen Sie jeder Eigenschaft einen Funktionstypen in der linken Tabelle zu!

Linke Tabelle	
Es gibt eine positive Zahl p mit $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	F
Die Differenz $f(x+1) - f(x)$ ist von x unabhängig.	C
Der Quotient $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ist von x unabhängig.	D
Das Produkt $x \cdot f(x)$ hängt nicht von x ab.	B

Rechte Tabelle	
A	$f(x) = ax^2 + bx + c$.
B	$f(x) = \frac{a}{x}$.
C	$f(x) = ax + b$.
D	$f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$.
E	$f(x) = a \cdot x^b$.
F	$f(x) = a \cdot \sin(bx)$.

Die erste Eigenschaft ist als PERIODISCH wiederzuerkennen.

Die zweite Eigenschaft ist typisch (sogar fast definierend) für lineare Funktionen. (FA 2.4)

Die dritte Eigenschaft ist Grundwissen zu Exponentialfunktionen: $[e^{kx}]' = ke^{kx}$.

Die vierte Eigenschaft ist die Definition einer indirekten Proportionalität.

Aufgabe 2. (2P) **Interpretationssache**.

Es sei $P(t)$ die Leistung eines Geräts, das um 8:00 eingeschalten wird, wobei t die Zeit in Sekunden ab 8:00 bedeutet. Die Leistung P wird in Watt (Joule pro Sekunde) ausgedrückt. Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_0^{3600} P(t)\mathrm{d}t$.

Antwort: Die Energie, die in der ersten Stunde durch das Gerät verbraucht (umgewandelt, geliefert) wurde.

Grundwissen: das Integral von Leistung über Zeit liefert eine Energiemenge.

Aufgabe 3. (2P) **Bedeutung der Ableitung**.

Ein Flugzeug steigt nach dem Starten auf. Die Höhe des Flugzeuges (in Metern) wird während der ersten 900 Sekunden des Fluges durch die Funktion $h : [0; 900] \to \mathbb{R}$ dargestellt. Interpretieren Sie den Ausdruck $h'(300)$ in diesem Kontext.

Momentane Änderungsrate der Höhe nach 300 Sekunden. Dies ist also die vertikale Geschwindigkeit 5 Minuten nach dem Start. Achtung: das Adjektiv „vertikal“ ist hier m.E. essentiell; die Geschwindigkeit eines Flugzeuges ist i.A. nicht nur senkrecht, sondern hat auch eine horizontale Komponente. Falls die vertikale Komponente der Geschwindigkeit mit v_z, die horizontale Komponente der Geschwindigkeit mit v_h angedeutet wird, dann hat die (totale) Geschwindigkeit die Größe $\sqrt{v_z^2 + v_h^2}$. Bitte diesen Kontext gut verstehen!

Aufgabe 4. (2P) **Parabelfläche**.

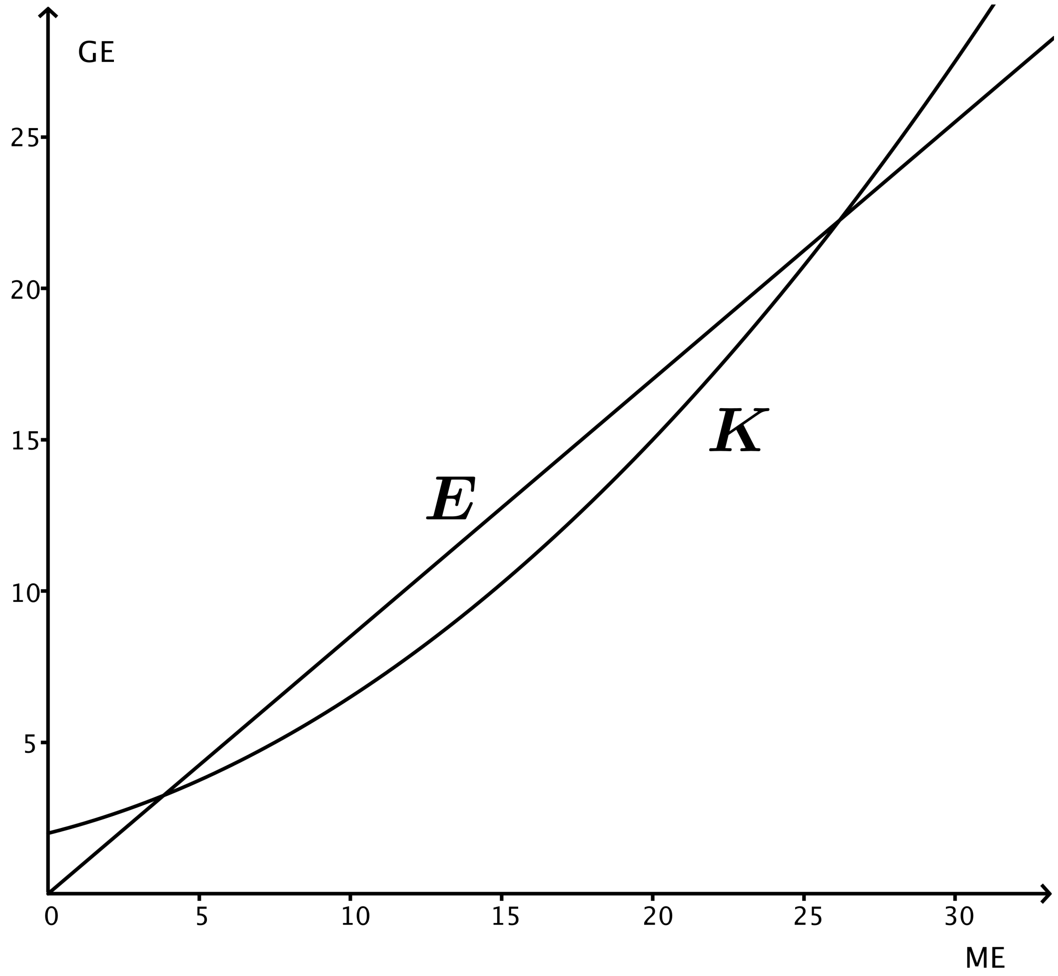
Gegeben ist die Parabel $y = 9 - x^2$. Bestimmen Sie die <u>Fläche</u> A, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird.

$A = 36$

Diese Aufgabe ist standard, also Grundwissen. Schnittpunkte mit der x-Achse, $y = 0$, also $x = \pm 3$. Zwischen diesen Punkte ist die Parabel über der x-Achse, sodass das Integral $\int_{-3}^{3} (9 - x^2) \mathrm{d}x$ positiv und gleich A ist. Für dieses Integral findet man 36.

Aufgabe 5. (2P) **Gewinn und Kosten**.

Im Diagramm sehen Sie die Graphen der Kostenunktion K und der Erlösfunktion E (beide in GE) in Abhängigkeit der Produktionsmenge x (ME). Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion G ein und geben Sie an, in welchem Produktionsbereich Gewinn gemacht wird.



Achtung: Der Graph von G ist eine Parabel mit den Nullstellen genau an den Stellen, an denen E und K sich schneiden. Die Höhe des Maximums dieser Parabel von G ist die maximale vertikale Distanz zwischen den Graphen von E und K, denn $G = E - K$ – das muss bei der Matura auch richtig sein! Der Gewinn wird nur gemacht im Bereich zwischen den beiden Nullstellen von G.

Aufgabe 6. (2P) **Autofahrt**.

Ein Auto fährt mehrere Stunden mit konstanter Geschwindigkeit und legt dabei in drei Stunden 180 Kilometer zurück. Geben Sie eine Funktionsvorschrift für den zurückgelegten Weg $s(t)$ (in Kilometer) seit dem Startpunkt, wobei die Zeit ab dem Start t in Stunden angegeben wird.

$s(t) = 60 \cdot t$

Achtung: (A) $60x$ ist falsch, weil das hier bedeutet, dass der Weg konstant ist, und zwar 60 mal eine Zahl x, die wir jetzt nicht wissen; x ist hier NICHT die Variable. (B) die Antwort 60 km/h ist auch nicht richtig; der Weg $s(t)$ hat Einheit Meter, und $s(t)$ hat nicht den konstanten Wert 60.

Aufgabe 7. (2P) **Stammfunktionen**.

Gegeben sind die Funktionen $a(x) = 3x^2$ und $b(x) = \frac{2}{x^2}$. Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale von a und b! (Achtung: $+C$ nicht vergessen!)

$$\int a(x)\mathrm{d}x = x^3 + C \quad , \qquad \int b(x)\mathrm{d}x = -\frac{2}{x} + C \quad .$$

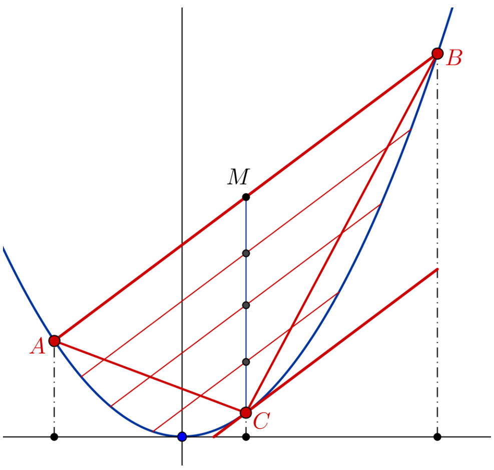
Aufgabe 8. (2P) **Parallele Geraden**.

Gegeben ist die Parabel $y = \frac{x^2-x}{5}$. Bestimmen Sie in welchem Punkt die Tangente an der Parabel parallel zur Sekante durch die Punkte $(0|0)$ und $(5|4)$ ist.

$x = 2,5$

(1) Steigung der Sekante ist $4/5$. Steigung der Parabel ist $\frac{2x-1}{5}$. Diese beiden Steigungen sind gleich, wenn $x = 2,5$.

(2) Als Grundwissen hatten wir im Unterricht schon des öfteren: Seien $A = (x_A|y_A)$ und $B = (x_B|y_B)$ zwei Punkte auf einer Parabel. Die Sekante durch A und B verläuft parallel zur Tangente im Punkte $C = (x_C|y_C)$, wobei x_C genau zwischen x_A und x_B liegt. Siehe auch die nachstehende Figur; hier ist M der Mittelpunkt von A und B, welcher direkt über[1] C liegt.



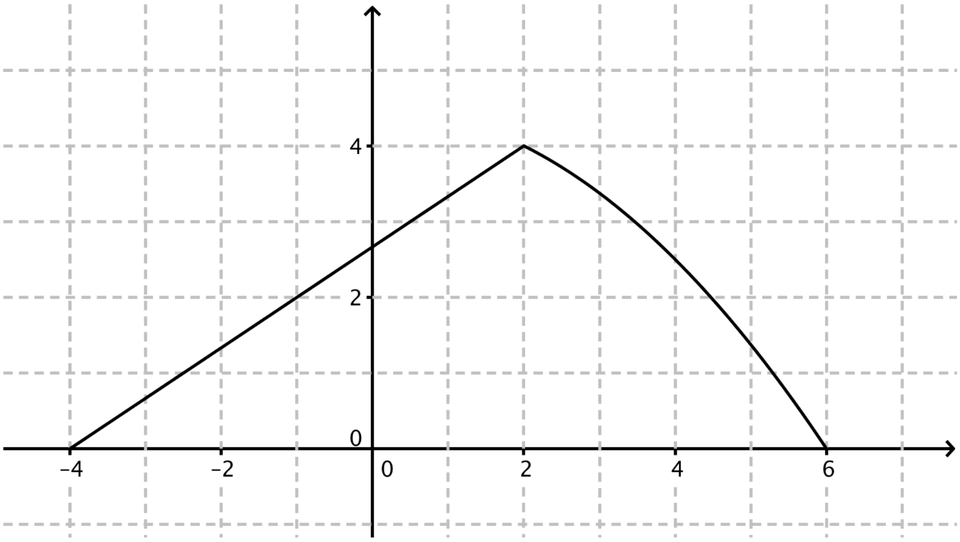
Aufgabe 9. (2P) **Ermitteln eines Integrals**.

In der Abbildung sehen Sie den Graphen einer Funktion h. Im Intervall $[-4; 2]$ ist sie eine lineare Funktion mit $h(-4) = 0$ und $h(2) = 4$, im Intervall $[2; 6]$ ist sie quadratisch mit

[1] Für die Kritiker: X liegt über Y heißt hier, dass XY parallel zur Achse der Parabel ist.

Funktionsvorschrift $h(x) = \frac{36-x^2}{8}$.

Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_{-4}^{6} h(x)\mathrm{d}x$.



$$\int_{-4}^{6} h(x)\mathrm{d}x = 21\frac{1}{3}$$

Strategie: Das Integral ist die Fläche zwischen Graph und x-Achse. Diese Fläche besteht aus einem Dreieck mit Fläche $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ und einem Parabelstück, welches wir durch $\frac{1}{8}\int_2^6 (36-x^2)\mathrm{d}x$ ausrechnen.

Aufgabe 10. (2P) **Parameter einer Exponentialfunktion bestimmen**.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ae^{\lambda x}$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$. Bestimmen Sie $a > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $f(3) = 12$ und $f(1) = 3$.

$a = \frac{3}{2}$ $\qquad\qquad$ $\lambda = \ln(2)$.

$12 = a \cdot e^{3\lambda}$ und $3 = a \cdot e^{\lambda}$.

Beide durch einander dividieren ergibt: $\frac{12}{3} = \frac{ae^{3\lambda}}{ae^{\lambda}} = e^{2\lambda}$, also $4 = e^{2\lambda}$, also die Wurzel ziehen $2 = e^{\lambda}$, somit $\lambda = \ln(2)$ (Definition des Logarithmus Naturalis). Dieses Ergebnis ($e^{\lambda} = 2$) benutzen, denn $f(1) = 3 = a \cdot e^{\lambda} = a \cdot 2$. Somit $a = 3/2$.

Aufgabe 11. (2P) **Graphen, Funktionen und Stammfunktionen**.

Gegeben sind vier Graphen von Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4. Ordnen Sie jedem Diagramm eine Stammfunktion aus der Tabelle zu!

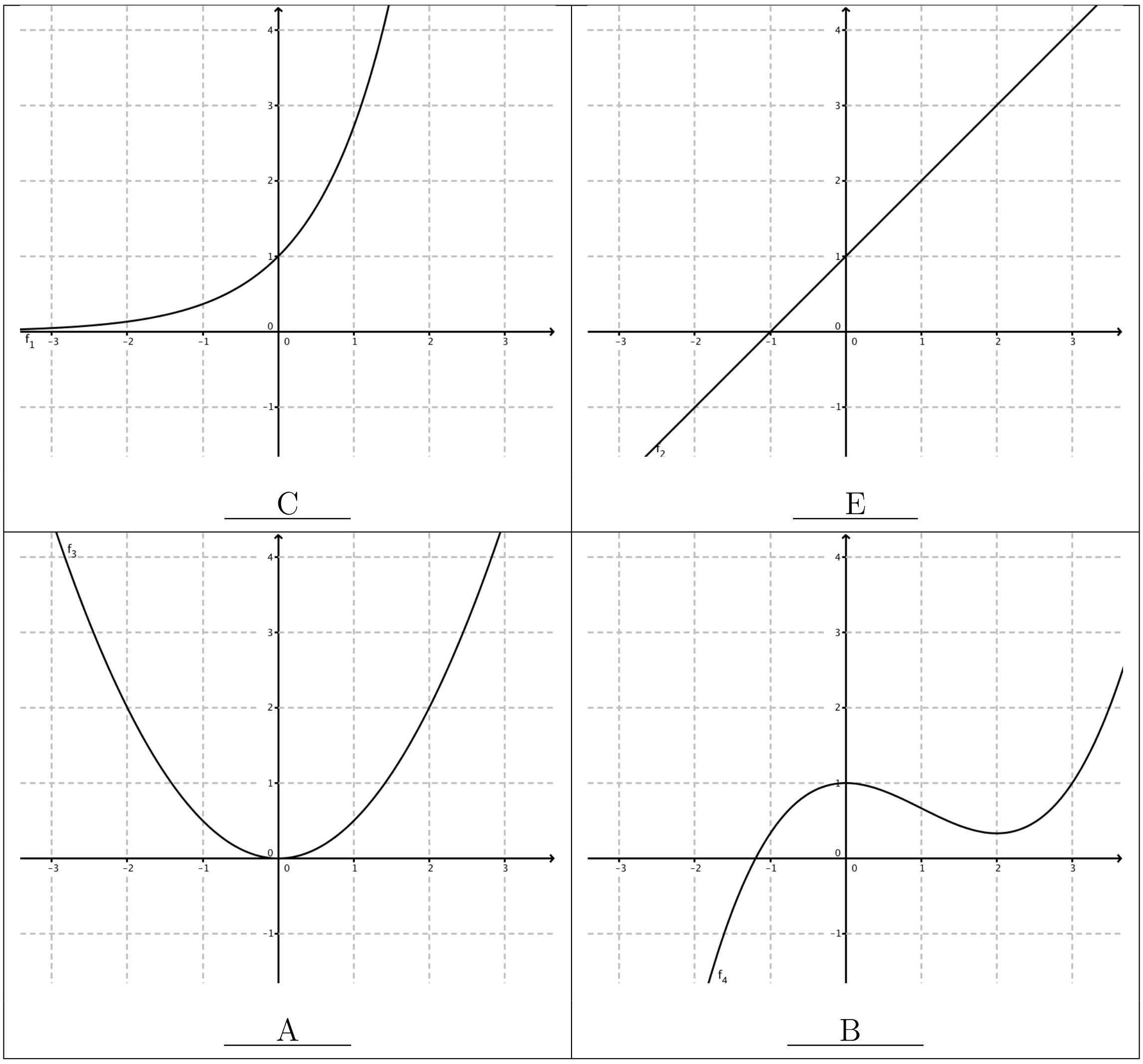


Tabelle mit Stammfunktionen	
A	$F(x) = \frac{x^3}{6} + 5.$
B	$F(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + x - 1.$
C	$F(x) = e^x + 1.$
D	$F(x) = e^{-x} - 1.$
E	$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1.$
F	$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$

(1) Erstes Bild, muss exponential sein, aber e^{-x} ist monoton fallend, somit muss es C sein.

(2) Wenn f linear ist, dann ist F eine quadratische Funktion. Wenn wir $\frac{x^2}{2}+1$ differenzieren bekommen wir x, und der Graph von $f(x) = x$ geht durch den Ursprung. Wenn wir

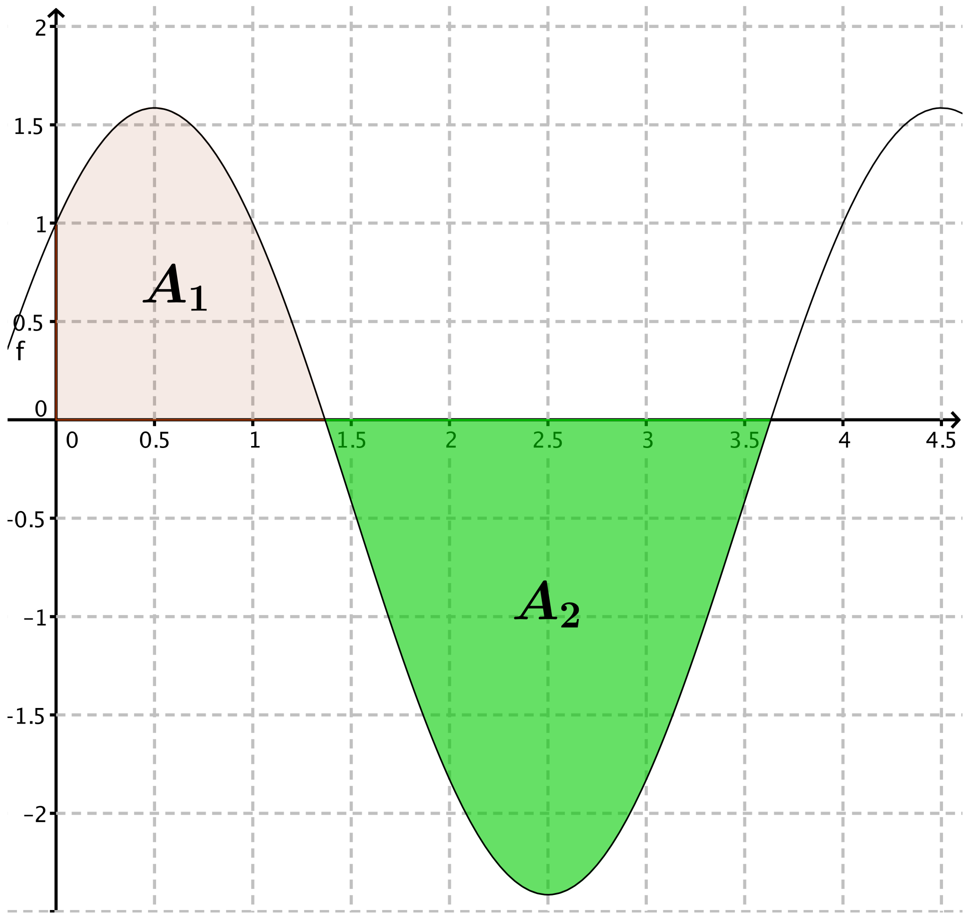
$\frac{x^2}{2} + x + 1$ differenzieren, bekommen wir $f(x) = x + 1$, sodass $f(1) = 0$. Somit muss es E sein.

(3) Wenn f quadratisch ist, so ist F von Grad drei, daher A.

(4) Wenn f von Grad drei ist, so ist F von Grad vier, daher B.

Aufgabe 12. (2P) **Flächeninhalt und Integral**.

In der folgenden Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt. Die Funktion f hat mindestens zwei Nullstellen; sichtbar sind die Nullstellen $x_1 \approx 1,37$ und $x_2 \approx 3,57$. In der Abbildung sind auch die Flächen A_1 und A_2 dargestellt. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) in diesem Kontext an!



☐	$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_1 + A_2$
☐	$\displaystyle\int_{0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_2 + A_1$
☐	$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_2 - A_1$
☒	$\displaystyle\int_{0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2$
☒	$\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x = -A_2$

Aus der Grafik entnehmen wir direkt, dass $A_1 = \int_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$ und $A_2 = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x > 0$.

Erste Schularbeit Mathematik Klasse 8A G am 23.11.2016

TEIL 2 – Korrekturversion

Aufgabe 1. *Finanzmathematik.*

In Firma Epsilon werden Getränke produziert. Die Produktionsmenge (in Mengeneinheiten ME) wird mit x bezeichnet. Es sei $K(x)$ die Kostenfunktion, wobei die Kosten in Millionen Euro angegeben werden. In guter Annäherung kann K durch folgendes Polynom beschrieben werden:

$$K(x) = \frac{1}{1000} \cdot x^3 - \frac{3}{100} \cdot x^2 + \frac{8}{25} \cdot x + 3000$$

(a). (1 Kompensationspunkt) Geben Sie einen Termausdruck für die Grenzkostenfunktion.

(b). (3 Punkte) Geben Sie an, in welchem Interval der Verlauf der Kostenfunktion progressiv bzw. degressiv ist, und bestimmen Sie die Kostenkehre.

(c). (3 Punkte) Die Erlösfunktion beschreibt den Ertrag $E(x)$ in Abhängigkeit von der produzierten Menge x. Für die Firma Epsilon wird $E(x)$ durch $E(x) = 420x$ gegeben. Die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$ beschreibt den Gewinn der Firma. Bestimmen Sie den Cournot'schen Punkt x_C und den maximalen Gewinn.

(a) $K'(x) = 0,003x^2 - 0,06x + 0,32$

(b) $K''(x) = 0,006x - 0,06$ und $K''(x) = 0$ wenn $x = 10$, das ist die Kostenkehre. Im Intervall $[0;10)$ ist $K'' < 0$ also degressiver Kostenverlauf, im Intervall $(10;\infty)$ ist $K'' > 0$ also progressiver Kostenverlauf.

(c) Maximaler Gewinn bei $G'(x) = 0$, also $E'(x) = K'(x)$ also $420 = 0,003x^2 - 0,06x +$

$0,32$. Dies ist eine quadratische Gleichung, die zu lösen ist. Dann nicht vergessen, diesen x-Wert in G einzusetzen.

Aufgabe 2. *Wasser aus der Badewanne.*

Aus einer Badewanne strömt das Wasser mit Durchflussrate $I(t)$ (in Liter pro Sekunde), gegeben durch folgende Formel

$$I(t) = 0,45 - 0,0005 \cdot t\,.$$

In dieser Formel ist die Zeit t in Sekunden angegeben und zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde der Stöpsel aus der Wanne gezogen.

(a). (1 Kompensationspunkt) Interpretieren Sie die Ausdrücke $\displaystyle\int_0^{10} I(t)\mathrm{d}t$ und $\dfrac{\int_0^{10} I(t)\mathrm{d}t}{10}$.

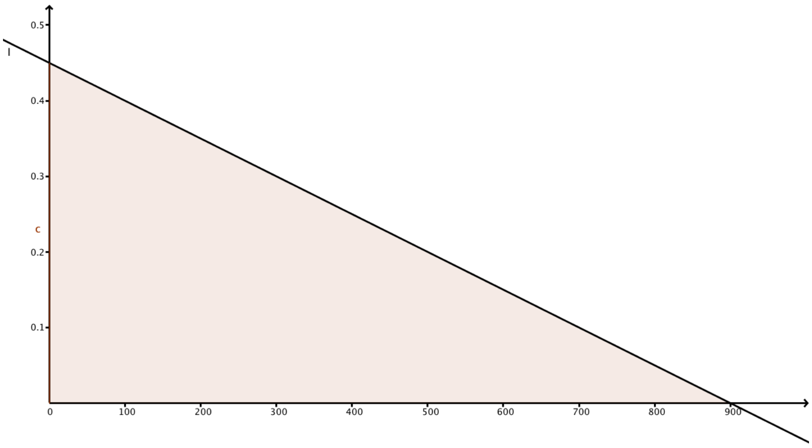
(b). (4 Punkte) Berechnen Sie, zu welcher Zeit t gilt, dass $I(t) = 0$. Deuten Sie diese Zeit im Kontext und berechnen Sie dann, wie viel Wasser zu $t = 0$ noch in der Badewanne war.

(a) (1) $\displaystyle\int_0^{10} I(t)\mathrm{d}t$ ist die Wassermenge, die in den ersten 10 Sekunden aus der Badewanne gelaufen ist.

(a) (2) $\dfrac{\int_0^{10} I(t)\mathrm{d}t}{10}$ ist die MITTLERE DURCHFLUSSRATE in den ersten 10 Sekunden. Dies ist ein Standardkontext, bitte also gut studieren und auswendig lernen!

(b) Falls $t = 900$ ist $I(t)$ null. Dann strömt nichts mehr, die Badewanne ist leer. Die totale Wassermenge ist dann $\int_0^{900} I(t)\mathrm{d}t$. Dieses Integral ist einfach. Es gibt aber auch eine geometrische Methode: der Graph von I ist eine Gerade durch die Punkte $(0; 0,45)$ und $(900|0)$. Das gefragte Integral ist die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen $0,45$ (L/s) und 900 (s), also $V = \frac{0,45 \cdot 900}{2} = 202,5$ Liter.

Siehe auch nachstehende Figur:



Aufgabe 3. *Drehkörper.*

Es sei $f(x) = 15 - 2 \cdot e^x$ gegeben.

(a). (1 Kompensationspunkt) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass $f(a) = 0$.

(b) (4 Punkte) Die Fläche, die von dem Graphen von f, der y-Achse, der x-Achse und der Geraden $x = a$ eingeschlossen wird, wird um die x-Achse gedreht. Berechnen Sie das Volumen des so entstandenen Rotationskörpers. (Falls Sie (a) nicht haben, nehmen Sie $a = 2$.)

(a) $15 - 2e^a = 0$ also $e^a = 7,5$ somit $a = \ln(7,5)$.

(b)

$$V = \pi \int_0^a (15 - 2e^x)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^a (225 - 60e^x + 4e^{2x}) \mathrm{d}x =$$

$$[225x - 60e^x + 2e^{2x}]_0^a = (225 \cdot a - 60 \cdot 7,5 + 2 \cdot (7,5)^2) - (0 - 1 + 4) = (TR)$$

Aufgabe 4. *Integralfunktionen.*

Gegeben ist eine positive und stetige Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^{>0}$.
Betrachten Sie die folgende Funktion $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, definiert auf dem Intervall $D_g = [0, \infty)$.
(a). (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an!

☐	g ist eine stetige Funktion ohne Nullstellen.
☒	$g'(x) = f(x)$.
☐	g ist monoton fallend.
☐	$f'(x) = g(x)$.
☒	g hat genau eine Nullstelle.

(b). (4 Punkte) Betrachten wir des Weiteren noch folgende Funktionen: $h(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$ und $j(x) = \int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ für $x \geq 2$. Begründen Sie, dass $j(x) < h(x) < g(x)$ für alle $x \geq 2$, geben Sie einen Ausdruck für $j(x) - g(x)$ und zeigen Sie, dass g, j und h Stammfunktionen von f sind.

– Dies war eine angepasste Version einer Aufgabe aus dem Buch –

(a) Achtung: Da f positiv ist, muss g monoton steigend sein. Es gilt aber auch $g(0) = \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$, also g hat mindestens eine Nullstelle, und da g monoton steigend ist, hat g genau eine Nullstelle.

(b) Erstens gelten $g(x) - h(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t > 0$ und auch $h(x) - j(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t - \int_2^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t > 0$. Also $g(x) > h(x)$ und $h(x) > j(x)$. Das beweist die erste Behauptung. Zweitens gilt im Allgemeinen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

unabhängig von a. Dies ist genau die Definition der Stammfunktion. Somit sind g, h und j alle Stammfunktionen von f. Alternativ kann man auch aus der obigen Argumentation ablesen, dass

$$h(x) = j(x) + \int_1^2 f(t)\mathrm{d}t\,, \qquad g(x) = h(x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

und die rechten Seiten hängen nicht von x ab. Somit sind diese Differenzen konstant. Da g eine Stammfunktion von f ist, und damit $g + C$ für alle $C \in \mathbb{R}$ auch Stammfunktionen von f sind, so auch h und j. Wir finden somit auch

$j(x) - g(x) = -\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$.

Aufgabe 5. *Stetigkeit.* (2 Punkte)

Erklären Sie den Begriff „Stetigkeit" und geben Sie eine Funktion an, die nicht stetig ist.

$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig an der Stelle $x \in D$ falls $\lim_{t\uparrow x} f(t) = \lim_{t\downarrow x} f(t) = f(x)$. Dann ist f stetig wenn f stetig an allen Stellen $x \in D$ ist[2]

Somit sind Funktionen von der Form $f(x) = \frac{1}{x}$ schon stetig! Die Stelle $x = 0$ liegt nicht in der (größtmöglichen) Definitionsmenge von f.

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist auch stetig.

Gute Beispiele sind (1) $f(x) =$ die kleinste ganze Zahl z mit $z > x$ (Steppfunction); (2) $f(x) = 0$ falls $x \neq 0$ und $f(0) = 1$; (3) $f(x) = 1$ wenn $x \geq 0$ und $f(x) = -1$ wenn $x < 0$; (4) $f(x)$ ist die größte ganze Zahl z mit $z < x$; ...

[2]Für Kritiker: Man möge hier D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ nehmen.