Letzte Schularbeit Mathematik 8. Klasse
am 15. März 2017

KORREKTURVORLAGE Fehler vorbehalten

Aufgabe 1. (2P) **Zahlen** **AG 1**

Kreuzen Sie die **beiden** im Allgemeinen zutreffenden Aussagen an!

Der Quotient zweier ganzer Zahlen ist eine ganze Zahl.	☐
Es gibt mindestens eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger hat.	☒
Die Differenz (Subtraktion) zweier natürlichen Zahlen ist eine natürliche Zahl.	☐
Die Wurzel einer reellen Zahl ist eine reelle Zahl.	☐
Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist eine ganze Zahl.	☒

Aufgabe 2. (2P) **Quadratisch** **AG 2.3**

Gegeben ist die quadratische Gleichung $3x^2 - 6bx + 10 = 0$, wobei $b \in \mathbb{R}^+$.

Bestimmen Sie den Wert von b, für welchen die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat!

Antwort: $b = \sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1,82$

Aufgabe 3. (2P) **Container** **AG 3.1**

Auf ein Schiff werden Waren in drei unterschiedlichen Typen von Containern geladen. Es gibt die kleinen 20-Fuß-Container, die Standard 40-Fuß-Container und die High-Cube-Container.

Der Vektor $\mathcal{C}$ gibt das Volumen der drei Containertypen in m^3 an, der Vektor $\mathcal{Z}$ gibt die Anzahl der Container pro Typ an.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 33 \\ 67 \\ 76 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{Z} = \begin{pmatrix} 105 \\ 304 \\ z \end{pmatrix}.$$

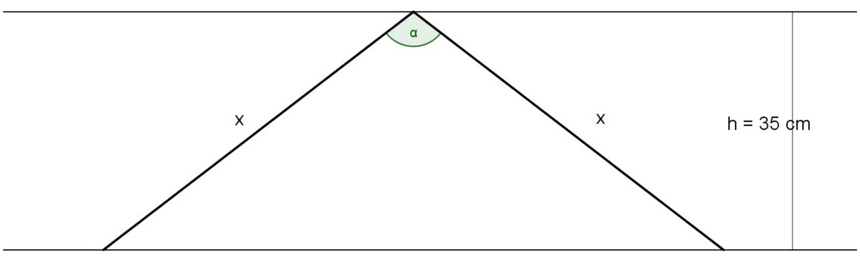
Die Container haben insgesamt ein Volumen von 26 265 m^3.

Berechnen Sie, wie viele High-Cube-Container geladen werden!

Antwort: $z = 32$

Aufgabe 4. (2P) **Vogelhäuschen** **AG 4.1**

Das Dach eines Vogelhäuschens soll so gebastelt werden, dass sein Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ist, das genau 35 cm hoch ist und am Giebel den Winkel $\alpha = 105^o$ aufweist.



Bestimmen Sie die Länge x der Dachlatten.

Antwort: $x = 57,5$ cm

Aufgabe 5. (2P) **Erhöhung des Arguments** **FA 1.9**

In der linken Tabelle sind Funktionsgleichungen von sechs Funktionen gegeben. In der rechten Tabelle sind vier Beziehungen zwischen $f(x+1)$ und $f(x)$ gegeben. Ordnen Sie jede Beziehung aus der rechten Tabelle einer Funktion aus der linken Tabelle zu, und tragen Sie den Buchstaben der Funktionsgleichung in die Kästchen der zutreffenden Beziehung ein!

A	$f(x) = x^2$
B	$f(x) = x + 2$
C	$f(x) = 2x$
D	$f(x) = 2^x$
E	$f(x) = \dfrac{2}{x}$
F	$f(x) = 2$

$f(x+1) = 2 \cdot f(x)$	D
$f(x+1) = f(x)$	F
$f(x+1) = f(x) + 1$	B
$f(x+1) = f(x) + 2$	C

Aufgabe 6. (2P) **Polynome dritten Grades** **FA 4.4**

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = ax^3 + bx$, **wobei aber** $\mathbf{a}, \mathbf{b} > \mathbf{0}$.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für jede Polynomfunktion dieser Art zutreffen!

f bestitz keine Nullstellen.	☐
f besitzt keine Extremstellen.	☒
f besitzt eine Wendestelle.	☒
f besitzt drei Nullstellen.	☐
f besitzt zwei Extremstellen.	☐

Aufgabe 7. (2P) **Bürgermeister will Exponentialfunktion** **FA 5.1**

Die Einwohnerzahl der Stadt Bad Achta wurde in folgenden Jahren gemessen:

Im Jahr 2000:	143.000 Einwohner
Im Jahr 2016:	180.000 Einwohner

Der Bürgermeister will diesen Wachstumsvorgang durch eine Exponentialfunktion

$$N(t) = A \cdot c^t$$

beschrieben sehen, wobei die Zeit t in Jahren nach 2000 augedrückt wird und $N(t)$ die Anzahl der Einwohner von Bad Achta sind.

Bestimmen Sie und interpretieren Sie A und c!

Antwort:

$A = 143.000\,, \qquad c = 1,014$

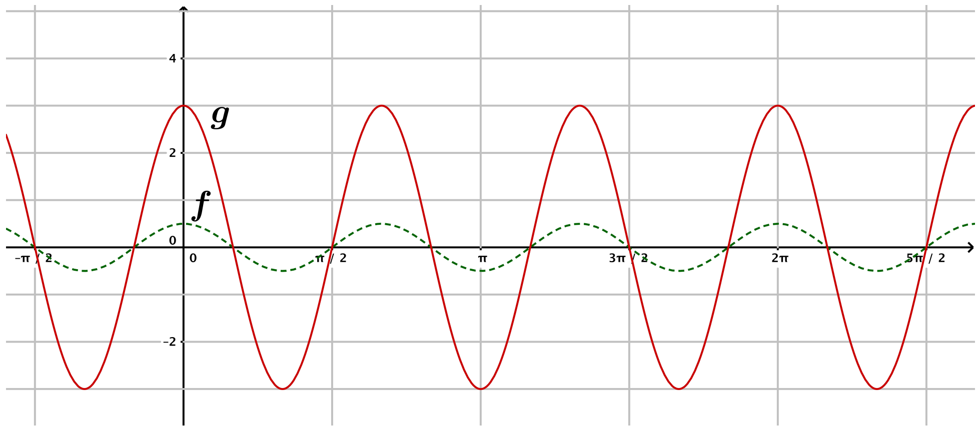
Interpretation: 143.000 Einwohneranzahl am Anfang ($t = 0$) und ein Wachstum von 1,4% pro Jahr.

Aufgabe 8. (2P) **Cosiness** **FA 6.3**

Im nachfolgenden Diagramm sind die Graphen zweier Funktionen f und g dargestellt. Die zugehörigen Funktionsvorschriften lauten:

$$f(x) = a_1 \cdot \cos(b_1 \cdot x)\,, \qquad g(x) = a_2 \cdot \cos(b_2 \cdot x)\,,$$

wobei a_1, a_2, b_1 und b_2 reelle, positive Parameter sind.



Ergänzen Sie die Lücken im Text so, sodass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

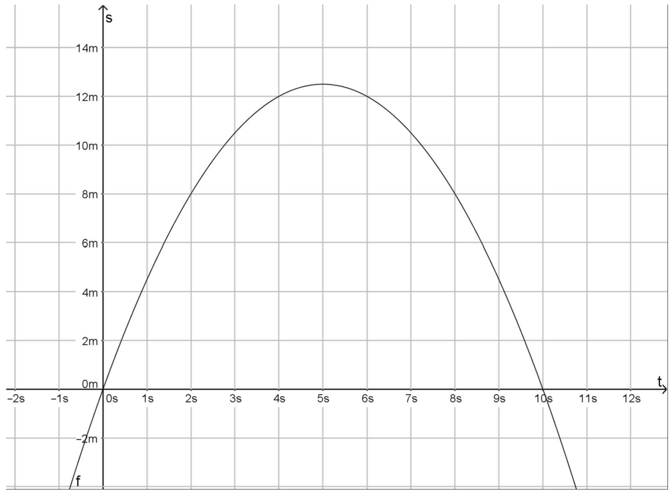
Für die reellen Parameter a_1, a_2, b_1 und b_2 gelten die Beziehungen ____①____ *und* ____②____ .

①	
$a_1 > a_2$	☐
$a_1 = a_2$	☐
$a_1 < a_2$	☒

②	
$b_1 > b_2$	☐
$b_1 = b_2$	☒
$b_1 < b_2$	☐

Aufgabe 9. (2P) **Weg-Zeit-Diagramm** **AN 1.1**

Gegeben ist das Weg-Zeit-Diagramm ($s-t$-Diagramm) einer Bewegung.

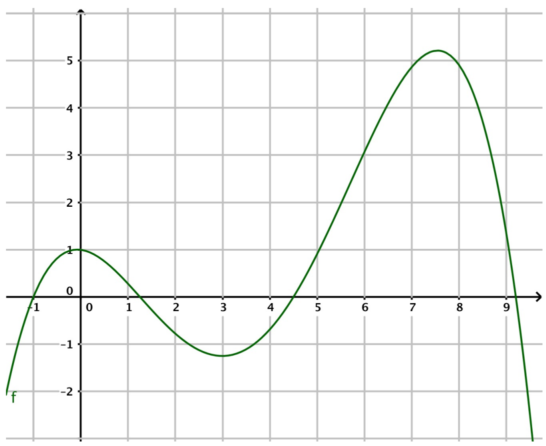


Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[6; 8]$ beträgt $-2m/s$.	☒
Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit $2s$ ist ungefähr $3m/s$.	☒
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[2; 6]$ entspricht der mittleren Geschwindigkeit in diesem Intervall.	☒
Die momentane Geschwindigkeit zur Zeit $5s$ ist Null.	☒
Die maximale Geschwindigkeit wird bei $5s$ erreicht.	☐

Aufgabe 10. (2P) Steigung — AN 1.2

Gegeben ist der Graph einer Funktion f.



Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Differentialquotient an der Stelle -1 ist positiv.	☒
Der Differentialquotient an der Stelle 3 ist null.	☒
Der Wert von f' an der Stelle 2 ist positiv.	☐
Der Wert von f'' an der Stelle 0 ist negativ.	☒
Der Differenzenquotient im Intervall $[3; 5]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle 5.	☒

Aufgabe 11. (2P) **Wohltätige Stiftung** **AN 1.4**

500.000 Euro des Erbes eines berühmten Musikers fließen in eine wohltätige Stiftung. Jeden Monat werden vom <u>bestehenden</u> Kapital 10% an karitative Zwecke ausbezahlt, während **gleichzeitig** Spender Beträge von 8% des (selben) <u>bestehenden</u> Kapitals in die Stiftung einzahlen.

Beschreiben Sie die Kapitalentwicklung der Stiftung durch eine (rekursive) Differenzengleichung!

Antwort: $K_{n+1} = 0,98 \cdot K_n$.

Aufgabe 12. (2P) **Steigungswinkel** **AN 2.1**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x^2 + 2x - 3$.

Bestimmen Sie die Stelle(n), an der/denen der Steigungswinkel der Tangenten 45^o beträgt.

Antwort: $x = -\frac{1}{8}$

Aufgabe 13. (2P) **Grenzen der Integration** **AN 4.2**

Gegeben ist das bestimmte Integral

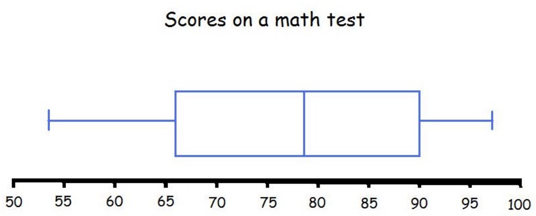
$$\int_{2a}^{5a} x^2 \mathrm{d}x\,.$$

Bestimmen Sie den Wert von $a \in \mathbb{R}^+$, sodass dieses Integral gleich 20 ist!

Antwort: $a = \sqrt[3]{\frac{20}{39}} \approx 0,8$.

Aufgabe 14. (2P) **Math-Test** **WS 1.1**

In den USA wurden bei einer Mathematiktestung in den Volksschulen eines Bundesstaates die mathematischen Fähigkeiten der Kinder überprüft. Folgendes Kastenschaubild stellt das Ergebnis dieser Testung graphisch dar. Die Zahlen geben an, wie viel Prozent der Aufgaben richtig gelöst wurden.

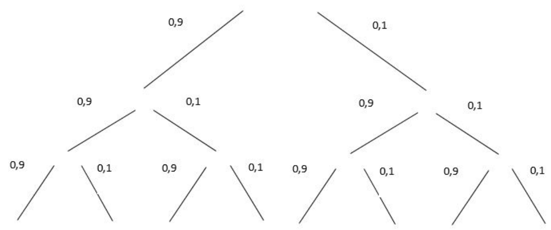


Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an, die man mit Sicherheit der Grafik entnehmen kann!

Die meisten Kinder hatten 75% bis 80% der Aufgaben richtig gelöst.	☐
Das arithmetische Mittel der Testung liegt im Intervall [77%; 79%]	☐
Kein einziges Kind hatte alle Aufgaben richtig gelöst.	☒
Die Anzahl der Kinder, die mindestens 90% der Aufgaben richtig gelöst haben, ist größer als die Anzahl der Kinder, die höchstens 67% richtig gelöst haben.	☐
Mindestens die Hälfte der Kinder hat weniger als 80% der Aufgaben richtig gelöst.	☒

Aufgabe 15. (2P) **Ziehen aus der Urne** **WS 2.3**

Aus einer Urne werden drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Der Zufallsversuch ist im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



Wie viele rote, grüne und blaue Kugeln sind in der Urne und welches Ereignis wird im Baumdiagramm dargestellt? Kreuzen Sie je eine der angegebenen Möglichkeiten so an, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

`Aus einer Urne mit 10 Kugeln ______①______, werden die ______②______ gezogen.`

①	
4 rote, 5 grüne und 1 blaue	☒
2 rote, 5 grüne und 3 blaue	☐
4 rote, 3 grüne und 3 blaue	☐

②	
roten	☐
grünen	☐
blauen	☒

Aufgabe 16. (2P) **Kugelbahnspiel** **WS 3.2**

Bei einem Glückspiel wird eine Kugel unter gleichbleibenden Voraussetzungen in eine Bahn geschickt, die zwei Ausgänge hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel durch Ausgang „Rot“ rollt, was einen Sachpreis bedeutet, ist gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit für „Blau“, was aber kein Gewinn bedeutet.

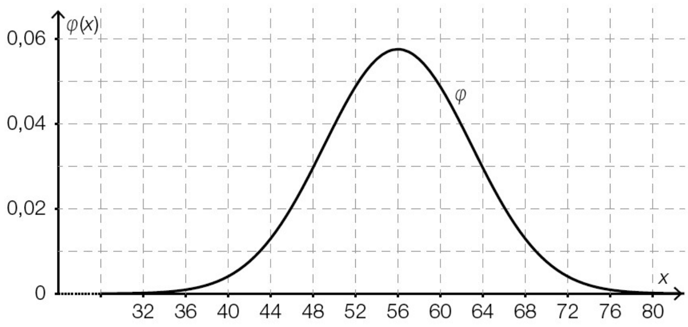
Ordnen Sie den Zufallsexperimenten mit bestimmten Ausgängen die richtigen Zahlenwerte zu!

Die Kugel wird viermal auf den Weg geschickt. Es kommt genau zweimal „Rot“.	D
Die Kugel wird viermal auf den Weg geschickt. Genau beim ersten und zweiten Versuch kommt „Rot“, sonst „Blau“.	C
Das Spiel wird fünfmal gespielt. Mindestens dreimal kommt „Rot“.	A

A	$\frac{1}{2}$
B	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{16}$
D	$\frac{3}{8}$
E	$\frac{5}{8}$

Aufgabe 17. (2P) Blutgruppen — WS 3.4

In Europa beträgt die Wahrscheinlichkeit p, mit Blutgruppe B geboren zu werden, circa $p = 0,14$. Für eine Untersuchung wurden n in Europa geborene Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B. Die Verteilung von X kann durch eine Normalverteilung angenähert werden, deren Dichtefunktion φ in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



Schätzen Sie anhand der obigen Abbildung den Stichprobenumfang dieser Untersuchung!

Antwort: $n \approx 400$.

Aufgabe 18. (2P) Full confidence! — WS 4.1

Um die Gewinnchance der Partei A bei der nächsten Wahl zu überprüfen, werden 1000 Personen befragt, ob sie Partei A wählen werden. Als Ergebnis der Befragung wird das symmetrische 95%-Konfidenzintervall $[0,33; 0,37]$ für den Wähleranteil bekanntgegeben.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Bei der Wahl wird der Wähleranteil der Partei A mit Sicherheit zwischen 33% und 37% liegen.	☐
Hätte man 2000 Personen befragt, weiter alles gleich gelassen, wäre das Intervall breiter geworden.	☐
Wäre der Wähleranteil in der Umfrage kleiner gewesen, so wäre das zugehörige 95%-Konfidenzintervall breiter gewesen.	☐
Das entsprechende 99%-Konfidenzintervall ist breiter.	☒
350 Personen haben angegeben, Partei A zu wählen.	☒

Letzte Schularbeit Mathematik 8. Klasse
am 15. März 2017

Zweiter Teil

Korrekturvorlage, aber Fehler vorbehalten!

Aufgabe 1. Hypothesen Testen.

Die Wahrscheinlichkeit mit Blutgruppe B geboren zu werden, beträgt in Europa rund 14%. Eine Forscherin möchte testen, ob dies in Ostasien auch so ist. Sie untersucht darum die Blutgruppen von 2000 Personen aus der Region Ostasien. In dieser Gruppe befanden sich 307 Personen mit Blutgruppe B.

(a) (1 Ausgleichspunkt) Formulieren Sie eine passende Nullhypothese zu diesem Versuch!

H_0: $p = 0,14$. Man kann hier aber sowohl einseitig wie zweiseitig testen. Ich bin aber für zweiseitig.

(2 Punkte) Testen Sie Ihre Hypothese mit den gegebenen Daten mit einem Signifikanzniveau von 95%.

$p = 0,14$, also $\mu = 0,14 \cdot 2000 = 280$, $\sigma^2 = 0,14 \cdot 0,84 \cdot 2000$ also $\sigma = 15,52$ Bei 307 gehört $z = \frac{307-280}{15,52} = 1,74$. Bei einem 95%-KI gehört $z = 1,96$. Somit liegt dieser Wert noch drinnen. Hypothese nicht verworfen.

(b) (2 Punkte) Ein anderer Forscher nimmt an, dass in Ostasien die Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe B eher 16% beträgt. Geben Sie ein 95%-Schätzbereich für den Anteil h an Personen mit Blutgruppe B in einer Stichprobe mit Umfang $n = 2000$ an.

Das Intervall folgt aus

$$0,16 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{2000}} \leq h \leq 0,16 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,16 \cdot 0,84}{2000}} \longrightarrow 0,144 \leq h \leq 0,176\,.$$

(c) Eine Lehrkraft, die ein Sabbatical genommen hat, lernt in Seoul koreanisch und macht eine Stichprobe in der Wohngemeinschaft, in der sie wohnt: Von 12 ostasiatischen Personen hatten 3 Blutgruppe B.

(1 Ausgleichspunkt) Entscheiden Sie, ob de Zufallsversuchs der Lehrkraft mit der Normalverteilung beschrieben werden kann!

Nein, denn $p(1-p)n = 0,14 \cdot 0,86 \cdot 12 < 0,5 \cdot 0,5 \cdot 12 = 3 < 9$. Man braucht also nicht zu wählen, welchen Wert von p jetzt zu nehmen wäre.

Die Lehrkraft verwirft die Hypothese, dass die Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe B in Ostasien 14% beträgt. Ihr Kriterium dafür war: Die Hypothese wird angenommen, wenn von 12 Personen eine Person oder zwei Personen Blutgruppe B haben; anderenfalls wird sie verworfen.

(2 Punkte) Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit – also die Wahrscheinlichkeit eine gültige Hypothese fälschlicherweise zu verwerfen.

$$1 - P(X \in \{1,2\}) = 1 - 12 \cdot 0,14 \cdot (0,86)^{11} - 66 \cdot (0,14)^2 \cdot (0,86)^{10} = 0,434\,.$$

Aufgabe 2. Zufällige Maschinen

Eine stetige Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert zwischen x_1 und x_2 annimmt, folgendermaßen bestimmt ist

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\,,$$

wobei $f(x)$ als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezeichnet wird und durch folgende Gleichung definiert ist:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Eine Firma produziert Metallbolzen, deren Durchmesser annähernd normalverteilt sind. Ein Metallbolzen kann nur verwendet werden, wenn sein Durchmesser zwischen $80,7$ *mm* und $81,3$ *mm* liegt.

Erfahrungswerte für die Durchmesser der Metallbolzen sind: Erwartungswert $\mu = 81mm$ und Standardabweichung $\sigma = 0,2mm$.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Produktion Ausschuss sind! Stellen Sie das in einer Grafik grafisch dar!

$P(X \in [80,7; 81,3]) = \Phi(0,3/0,2) - \Phi(-0,3/0,2) \approx 0,87$ also etwa 13%

(b) (1 Ausgleichspunkt) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der der Durchmesser eines Bolzens genau $81mm$ beträgt! Begründen Sie Ihr Ergebnis mit obiger Gleichung!

Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist Null. Mit obiger Gleichung $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \Phi(a) - \Phi(a) = 0$, wobei Φ die Stammfunktion von f ist.

(c) (2 Punkte) Der Ausschussanteil (symmetrisch um μ) soll durch eine neue Maschine auf 8% gesenkt werden. Der Erwartungswert der neuen Maschine ist unverändert $\mu = 81mm$. Berechnen Sie, welche Standardabweichung σ_2 diese Maschine höchstens haben darf!

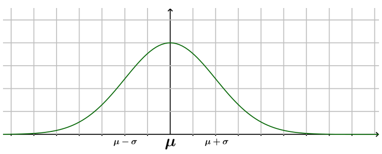
4% ist also zu klein. $\Phi(z) = 0,04$ bedeutet $z = -1,751$ und dies muss $-\frac{0,3}{\sigma_2}$ gleich sein, also $\sigma_2 = 0,3/1,751 \approx 0,17$.

(d) Ein anderer Zulieferer einer neuen Maschine behauptet, dass seine Maschine nur 6% Ausschuss produziert. Diese Aussage soll durch einen signifikanten Test geprüft werden, wobei $p_0 = 6\%$ die Nullhypothese H_0 lautet. Es soll ein rechtsseitiger Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% für diese Behauptung gemacht werden. Für diesen Test werden auf der neuen Maschine 500 Metallbolzen produziert und untersucht.

(2 Punkte) Ermitteln Sie den Ablehnbereich und interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext!

Kritischer z-Wert: $\Phi(z) = 0,95$, dann $z = 1,645$. Mittelwert $\mu = 500 \cdot 0,06 = 30$. Standardabweichung $\sigma = \sqrt{0,06 \cdot 0,94 \cdot 500} = 5,31$. Also, der maximale erlaubte Wert ist $30 + 1,645 \cdot 5,31 = 38,73$. Also ab 39 Stück Ausschuss wird die Hypothese abgelehnt.

(e) (1 Ausgleichspunkt) Skizzieren Sie im nachfolgenden Diagramm für einen zweiseitigen Anteilstest die Annahmebereiche und Ablehnbereiche für H_0, wenn die (maximale) Irrtumswahrscheinlichkeit 5% beträgt, und beschriften Sie das Diagramm mit zugehörigen Prozentwerten.



Symmetrisch um Mittelwert, 2,5% muss zweimal sichtbar sein, also in der Mitte 95%. In der Mitte ist der Annahmebereich, an den Rändern der Ablehnbereich.

Aufgabe 3. Straßenbau

Straßenbauprojekte sind oft schwierig zu realisieren, die verschiedensten Interessengruppen reden dabei mit, sei es die Lobby der LKW-Fahrer oder die Ortsbewohner.

(a) Auf dem Straßenbauamt einer Gemeinde liegt der Plan für eine Umfahrungsstraße auf, von der erst die beiden Teilstücke S_1 und S_2 fertig gestellt wurden. Das Straßenstück

S_1 kann durch eine lineare Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = -0,5 \cdot x - 3\,, \qquad \text{für} \;\; x \leq -2$$

beschrieben werden. Das zweite Straßenstück wird durch eine Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = 0,125 \cdot (x-2)^2 - 1\,, \qquad \text{für} \;\; x \geq 4$$

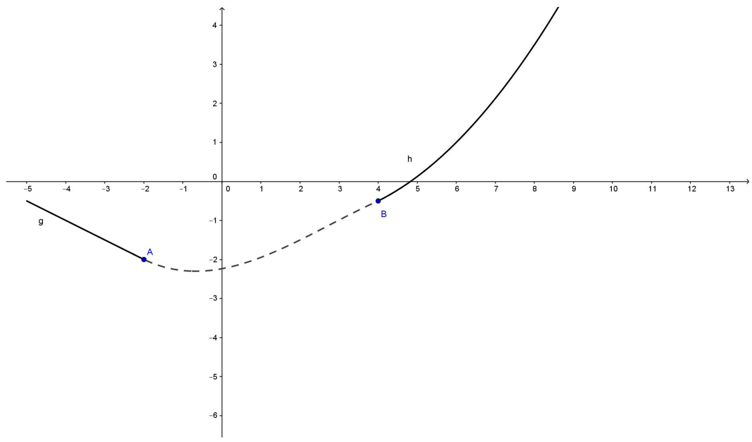
beschrieben. Das fehlende Straßenstück zwischen den Punkten A und B (sehen Sie die nachfolgenden Abbildung) will man mit einer Polynomsfunktion f beschreiben, und dabei es soll so gebaut werden, dass es „nahtlos“ und „knickfrei“ in die bestehenden Straßenstücke übergeht.

(3 Punkte) Formulieren Sie die dazu erforderlichen Bedingungen für f und begründen Sie, dass f keine lineare Funktion sein kann.

(Die Funktionsgleichung muss nicht bestimmt werden.)

$f(-2) = g(-2)$, $f'(-2) = g'(-2)$, $f(4) = h(4)$ und $h'(4) = f'(4)$.

eine lineare Funktion geht nicht, weil die haben überall dieselbe Steigung, aber $h'(4) = 1/2$ und $g'(-2) = -1/2$. Oder, da $h(4) = -0,5$ und $g(-2) = -2$ muss die Steigung der linearen Funktion positiv sein, aber $g'(-2) < 0$. Oder, Steigung muss $(h(4) - g(-2))/6 = -1,5/6 = -0,25$ aber keine der beiden Funktion g und h hat diese Steigung.



(b) Vor der Einführung der Autobahnmaut fuhren durchschnittlich 200 Fahrzeuge pro Stunde durch den Ort, damals befanden sich unter 20 Fahrzeugen 3 LKW. Nach Einführung der Autobahnmaut ist die Gesamtzahl der Fahrzeuge pro Stunde um 10% gestiegen, der Anteil der LKW am Fahrzeugenaufkommen hat sogar um ein Drittel zugenommen – daher soll auch die Umfahrung fertig gebaut werden.

(1 Ausgleichspunkt) Bestimmen Sie rechnerisch, wie viele LKW pro Stunde nun durchschnittlich durch den Ort fahren.

Anteil war $\frac{3}{20}$, wird also $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Es fahren jetzt 220 Fahrzeuge, und ein Fünftel davon ist 44.

(c) (2 Punkte) Im Rahmen einer aktuellen Verkehrszählung passierten innerhalb einer Stunde 300 Fahrzeuge die Zählstelle, bei 60 der gezählten Fahrzeuge handelte es sich um einen LKW.

Berechne ein 95%-Konfidenzintervall für den ungekannten Parameter p der LKW an der Gesamtheit der Fahrzeuge.

Anteil $h = \frac{1}{60} \approx 0,0167$, also $1 - p = \frac{59}{60}$. Und $z\Delta = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{59}{60^2 \cdot 300}} \approx 0,0145$. Daher $I = [0,0022; 0,0312]$.

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie, wie viele Fahrzeuge insgesamt die Zählstelle passieren müssten, damit das 95%-Konfidenzintervall eine Breite von 4% hat, wobei aber noch kein Wert für die relative Häufigkeit p erhoben wurde.

Für h muss man dann $h(1-h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ wählen. Es gilt dann die Gleichung

$$0,02 = z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{1}{4n}}$$

Also $4n = (1,96/0,02)^2 = 9604$ also $n = 2401$

Aufgabe 4. Reziproke quadratische Polynome

Gegeben sind eine (normierte) quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Polynomfunktion zweiten Grades f gegeben durch $f(x) = x^2 + px + q$.

(a) (3 Punkte) Lässt sich die Gleichung $x^2+px+q = 0$ in die Form $(x-z)\cdot(x-\frac{1}{z}) = 0$ mit $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bringen, so nennt man diese Gleichung eine reziproke quadratische Gleichung.

Geben Sie mithilfe von Gleichungen an, wie die Parameter p und q jeweils von z abhängen.

Ausmultiplizieren: $p = -z - \frac{1}{z}$, $q = 1$.

Bestimmen Sie die Werte für z, für die die reziproke quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt.

Nur eine Lösung, dann beide Lösungen gleich, also $z = \frac{1}{z}$, also $z = \pm 1$.

Geben Sie für jeden dieser Werte von z jeweils die lokalen Minimumstellen von f an.

Bei $z = 1$, Minimum bei $x = 1$, und bei $z = -1$, dann Minimum bei $x = -1$.

(b) Wählt man in der gegebenen Funktionsgleichung den Wert $q = -1$, dann erhält man eine Polynomfunktion zweiten Grades: $f(x) = x^2 + px - 1$.

(1 Ausgleichspunkt) Begründen Sie rechnerisch, warum die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen haben muss.

Diskriminante $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = p^2 + 4 > 0$.

(1 Punkt) Begründen Sie, warum die Funktion f eine positive und eine negative Nullstelle haben muss.

Seien a und b die Lösungen, dann $x^2 + px - 1 = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$. Also $ab = -1$. Somit müssen a und b unterschiedliche Vorzeichen haben.

(c) (3 Punkte) Für $q = p - \frac{1}{3}$ erhält man eine Funtion f mit $f(x) = x^2 + px + p - \frac{1}{3}$.

Bestimmen Sie für diese Funktion f denjenigen Wert für p, für den das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

den Wert -6 hat.

Weil das Integrationsintervall symmetrisch ist, fällt der lineare Teil px raus:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}((1)^3 - (-1)^3) + 2 \cdot (p - \frac{1}{3}) = 2p\,.$$

Also $p = -3$.

Geben Sie an, ob für dieses p die Gleichung

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

gilt, und begründen Sie ihre Entscheidung.

Berechne beide, und finde, dass beide nicht gleich sind. Oder, der quadratische Teil ergibt bei beiden dasselbe, der konstante Teil auch. Somit gilt nur Gleichheit wenn

$$\int_{-1}^{0} px\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} px\mathrm{d}x$$

Aber links ist $-p/2 = 3/2$ und rechts ist $p/2 = -3/2$.