KORREKTUR DER Wiederholung der ersten Schularbeit Mathematik
Klasse 8A G
am 28. November 2016

Aufgabe 1. (2P) **Eigenschaften von Polynomfunktionen**.

Der Graph der Polynomfunktion $f(x) = ax^2+bx+c$ berührt die x-Achse. Vervollständigen Sie den folgenden Satz, sodass er mathematisch korrekt ist!

Der Graph von f hat ______①______ mit der x-Achse, daher gilt ______②______.

①	
einen gemeinsamen Punkt	☒
keinen gemeinsamen Punkt	☐
mehrere gemeinsame Punkte	☐

②	
$b^2 = 4ac$	☒
$b^2 > 4ac$	☐
$b^2 < 4ac$	☐

Aufgabe 2. (2P) **Unbestimmtes Integral**.

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int(at^2 + e^{2a-t})\mathrm{d}a$

Antwort: $\frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{2}e^{2a-t} + C$, Kontrolle durch Differenzieren. C nicht vergessen!!!

Aufgabe 3. (2P) **Bedeutungen**.

Die Fahrzeit eines U-Bahn Zuges von der Station A zur Station B dauert 500 Sekunden. Die Funktion $v(t)$ stellt seine Geschwindigkeit t Sekunden nach Abfahrt bei Station A dar. Ordne den angeführten Termen ihre Bedeutung im oben beschriebenen Kontext zu.

$v'(25)$	D
$v(25)$	A
$\frac{v(25)-v(0)}{25}$	E
$\frac{1}{25}\int_0^{25} v(t)\mathrm{d}t$	C

A	Geschwindigkeit nach 25 Sekunden.
B	Die maximale Beschleunigung in den ersten 25 Sekunden.
C	Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 25 Sekunden.
D	Beschleunigung nach 25 Sekunden.
E	Durchschnittliche Beschleunigung in den ersten 25 Sekunden.
F	Entfernung zwischen den Stationen A und B.

Aufgabe 4. (2P) **Kosten**.

Die Kostenfunktion K in Abhängigkeit der Produktionsmenge x (in ME) wird durch folgende Funktionsvorschrift gegeben: $K(x) = \frac{1}{300}x^2 + 0,2x + 1000$. Bestimmen Sie eine Funktionsvorschrift für die Stückkostenfunktion und die Grenzkostenfunktion.

Stückkostenfunktion: $\frac{x}{300} + 0,2 + \frac{1000}{x}$

Grenzkostenfunktion: $\frac{x}{150} + 0,2$

Aufgabe 5. (2P) **Geschwindigkeit**.

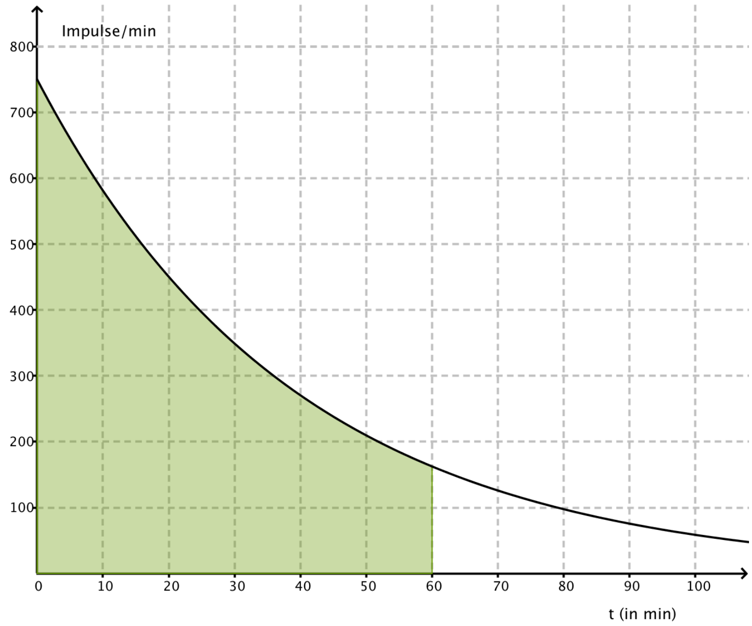
Die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit ist durch die Funktionsgleichung $v(t) = 121 - t^2$ gegeben (in m/s). Berechnen Sie das Integral $\int_0^{11} v(t)\mathrm{d}t$ und interpretieren Sie das Ergebnis in dem gegebenen Kontext!

$$\int_0^{11} v(t)\mathrm{d}t = [121t - \frac{t^3}{3}]_0^{11} = 887\frac{1}{3}$$

Deutung des Integrals im Kontext: Der zurückgelegte Weg im Intervall $[0, 11]$, also bis $v = 0$.

Aufgabe 6. (2P) **Radioaktive Strahlung**.

Ein Detektor misst die radioaktive Strahlung einer Probe und gibt die Strahlungsrate (Anzahl der Impulse pro Minute) an. Die Grafik zeigt den Verlauf der Strahlungsrate $R(t) = 750 \cdot e^{-0,0255 \cdot t}$

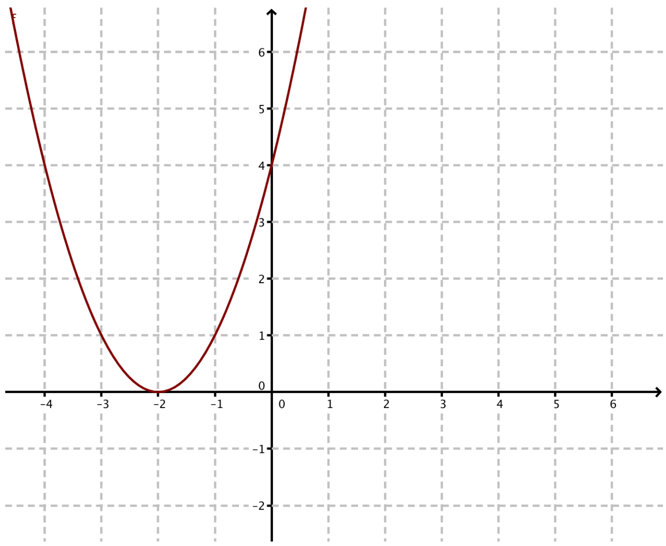


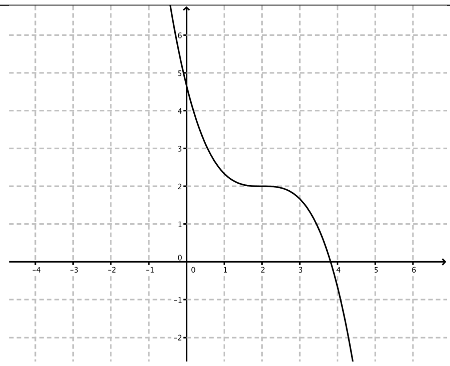
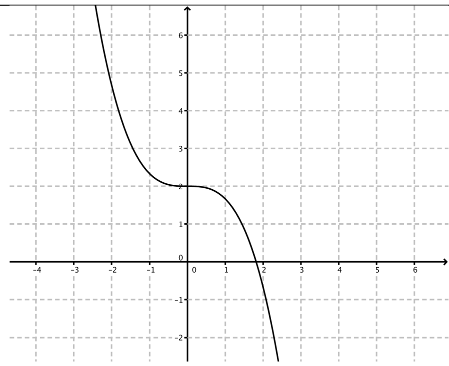
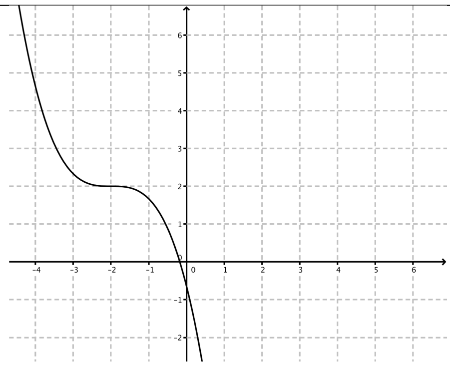
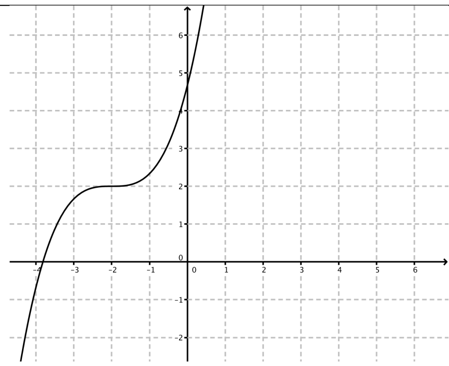
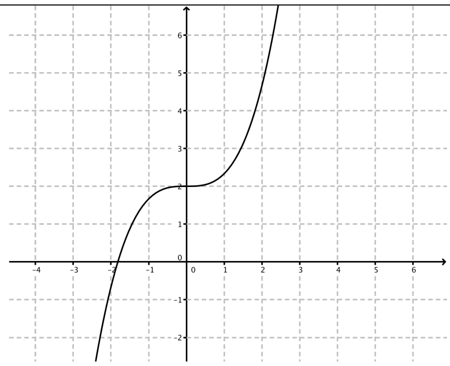
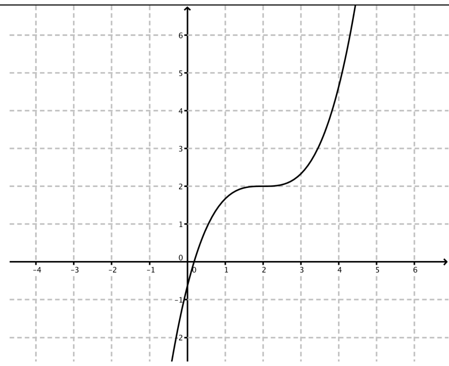
Berechnen Sie die dargestellte Fläche mithilfe eines geeigneten Integrals und interpretieren Sie ihre Bedeutung im Kontext!

Fläche $= \int_0^{60} R(t)\mathrm{d}t = \frac{750}{0{,}0255}(1 - e^{-0{,}0255 \cdot 60}) \approx 23043$

Deutung des Integrals: Anzahl der Impulse im Intervall $[0, 60]$; also die Menge an Strahlung in der ersten Minute nach $t = 0$.

Aufgabe 7. (2P) **Stammfunktionen finden**.
In der nebenstehenden Figur sehen Sie den Graph einer Funktion f. Kreuzen Sie bei den untenstehenden Figuren den zutreffenden Graphen einer Stammfunktion F von f an.



	
☐	☐
	
☐	☒
	
☐	☐

Aufgabe 8. (2P) **Keime in Kuhmilch**.

Die Anzahl der Keime in Kuhmilch nimmt etwa um $1,5\%$ pro Minute zu, wenn die Milch nicht gekühlt wird. Anfänglich seien 25.000 Keime pro ml vorhanden. Milch mit einer Keimzahl unter 100.000 pro ml entspricht der Güteklasse 1. Geben Sie einen Termausdruck für die Anzahl $A(t)$ der Keime pro ml nach t Minuten an und bestimmen Sie, nach wie viel Minuten die Milch nicht mehr der Güteklasse 1 ist.

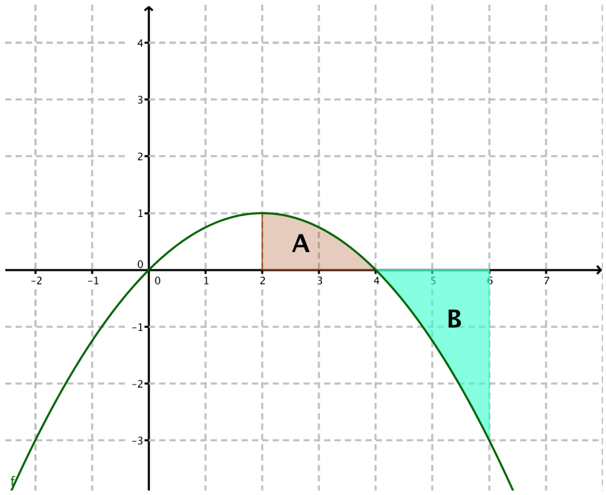
$A(t) = 25.000 \cdot (1,015)^t$

Nach $t = \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}015)}$ Minuten ist die Milch nicht mehr der ersten Güteklasse. Denn $100.000 : 25.000 = 4$, sodass die Zeit t gefragt ist, bei der $(1,015)^t = 4$.

Aufgabe 9. (2P) **Fläche**.
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x(4-x).$$

In der nebenstehenden Figur sehen Sie den Graphen und zwei markierte Flächen mit Flächeninhalten A und B.



Ordnen Sie jedem Ausdruck in A und B aus der linken Tabelle einen Integralausdruck aus der rechten Tabelle zu:

$A+B$	B
$A-B$	D
$B-A$	C
A	E

A	$\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$
B	$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_4^6 f(x)\mathrm{d}x$
C	$\lvert \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x \rvert$
D	$\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x$
E	$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$
F	$\int_4^6 f(x)\mathrm{d}x$

Aufgabe 10. (2P) **Aussagen zu Integralen**.

Es sei f eine Funktion mit einer bestimmten Stammfunktion F. Kreuzen Sie die beiden im Allgemeinen zutreffenden Aussagen an!

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = F(x)$	☐
$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - F(x)$ ist konstant, m.a.W. unabhängig von x.	☒
$F(x) = f'(x)$	☐
$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	☒
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ist die Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen von f im Intervall $[a; b]$	☐

NB: Die Funktion $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ist auch eine Stammfunktion von f.

Aufgabe 11. (2P) **Terrassenpunkt**.

Es sei f die kubische Funktion $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ und gegeben ist, dass an der Stelle $x = 1$ die Funktion f einen Terrassenpunkt hat. Bestimmen Sie a und b!

$a = -3$ ______________

$b = 3$ ______________

Aufgabe 12. (2P) **Ermitteln einer periodischen Funktion**.

Gegeben ist die Ableitung $f'(x) = 7 \cdot \sin(5x)$ einer periodischen Funktion f. Des Weiteren ist bekannt, dass $f(\frac{\pi}{10}) = 0,2$. Ermitteln Sie $f(x)$!

$f(x) = -\frac{7}{5}\cos(5x) + 0,2$

NB: $\cos(5 \cdot \frac{\pi}{10}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

KORREKTUR VON TEIL 2

Aufgabe 1. *Reibung.*

Wenn ein Fussball über einen Rasen rollt, bleibt die Geschwindigkeit des Balles nicht konstant, sondern nimmt wegen der Reibung ab. Im Falle eines gut gemähten Rasens lässt sich die Geschwindigkeit annäherungsweise durch die Formel

$$v(t) = v(0) \cdot e^{-r \cdot t}\,, \qquad v(0), r > 0$$

beschreiben, wobei $v(0) > 0$ die Geschwindigkeit zu $t = 0$ (also die Anfangsgeschwindigkeit) ist, und die positive Zahl r von der Beschaffenheit des Balles und des Rasens abhängt. Nehmen wir $v(0) = 10m/s$ und $r = 0,2\ s^{-1}$. (Die Einheit von r ist Hz, also s^{-1}.)

(a). (1 Kompensationspunkt) Geben Sie die Definition einer monoton fallenden Funktion.

(b). (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $v(t)$ eine monoton fallende Funktion ist.

(c). (3 Punkte) Geben Sie einen Termausdruck für das Integral $s(T) = \int_0^T v(t)\mathrm{d}t$, interpretieren Sie den Term im Kontext, und zeigen Sie, dass $s(T)$ als Funktion von T monoton steigend ist.
(d). (2 Punkte) Betrachten Sie die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} v(t)$ und $\lim_{T\to\infty} s(T)$ und begründen Sie mithilfe dieser Grenzwerte, dass die angegebene Annäherung nicht für alle Zeiten gültig sein kann.

(a) f ist monoton fallend, wenn $a \leq b$ impliziert $f(a) \geq f(b)$.

(b) Es gilt $v'(t) = -r \cdot v(0) \cdot e^{-rt} < 0$ für alle t. Das ist hinreichend. Auch geht es so: wenn $t_1 < t_2$, dann $\frac{v(t_1)}{v(t_2)} = e^{r(t_2 - t_1)} > 1$, also $v(t_2) < v(t_1)$.

(c) $s(T) = \frac{v(0)}{r}(1 - e^{-rT})$. Ist der zurückgelegte Weg im Intervall $[0, T]$. Da $s'(T) = v(T) > 0$ ist $s(T)$ monoton steigend; das ist hinreichend. Auch geht es so: seien $T_1 < T_2$, dann

$$\frac{s(T_2)}{s(T_1)} = \frac{1 - e^{-rT_2}}{1 - e^{-rT_1}} = \frac{1 - e^{-rT_1} + e^{-rT_1} - e^{-rT_2}}{1 - e^{-rT_1}} = 1 + \frac{e^{-rT_1} - e^{-rT_2}}{1 - e^{-rT_1}} > 1$$

weil $e^{-rT_1} > e^{-rT_2}$ wenn $T_2 > T_1$. Somit ist $s(T_2) > s(T_1)$.

(d) $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ und $\lim_{T\to\infty} s(T) = \frac{v(0)}{r}$. Für alle Zeiten ist laut Formeln die Geschwindigkeit positiv, und erst im zeitlich Unendlichen kommt der Ball zum Stillstand. In der Praxis gibt es einen endlichen t-Wert, sodass $v(t) = 0$. Auch sieht man, dass $s(T)$ mit zunehmender T auch weiter zunimmt, bis im zeitlich Unendlichen, was nicht realistisch ist.

Aufgabe 2. *Kugel & Kreis.*

(a). (1 Kompensationspunkt) Betrachten Sie folgende Zuordnungen:

> (A) *In einer Klasse mit 20 Personen werden den Zahlen aus der Menge* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *die Namen der Personen der Klasse zugeordnet. Die Klasse wird sozusagen in 5 Gruppen aufgeteilt.*
> (B) *Jeder Zahl* $x \in [0, 1]$ *werden die* y*-Werte zugeordnet, für welche* $x^2 + y^2 = 1$ *gilt.*

Bei beiden Zuordnungen handelt es sich nicht um Funktionen. Erklären Sie, warum es sich hier nicht um Funktionen handelt!

(b). (3 Punkte) Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Das Volumen einer Kugel mit Radius R beträgt $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Hinweis: Benutzen Sie die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$.

(a) Es werden in beiden Situationen einem und demselben „Ding“ mehrere Zahlen zugeordnet; eine Funktion f hat bei jedem Input x nur einem Output $f(x)$, und nicht mehrere.

(b) Die obere Hälfte des Kreises bekommen wir aus $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, die Kugel ist davon der Rotationskörper:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} y^2 \mathrm{dx} = \pi \int_{R}^{R} (R^2 - x^2) \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi R^3 \,.$$

Aufgabe 3. *Periodische Funktionen und Integrale.*

(a). (1 Kompensationspunkt) Kreuzen Sie die beiden richtigen Aussagen an!

Jede Stammfunktion F von $f(x) = \sin(x)$ ist periodisch.	☒
$\int_{-a}^{a} \cos(x)\mathrm{d}x = 0$ für alle $a > 0$.	☐
$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 1$.	☐
$\int_{-a}^{a} \sin(x)\mathrm{d}x = 0$ für alle $a > 0$.	☒
$\int \sin(kx)\mathrm{d}x = -\frac{\cos(x)}{k}$ für alle $k > 0$.	☐

(b). (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktionen $f_n(x) = \sin(nx)$. Geben Sie einen Ausdruck P_n für die Periode von f_n und geben Sie Termausdrücke für die Integrale

$$T(n) = \int_0^{P_n/2} f_n(x)\mathrm{d}x\,, \quad S(n) = \int_0^{P_n} f_n(x)\mathrm{d}x\,, \quad U(n) = \int_0^{P_n/2} n f_n(x)\mathrm{d}x\,.$$

(c). (3 Punkte) Die Funktionen $g(x) = a\sin(bx) + c$ sind periodisch, wobei a, b, c reelle Zahlen sind $a, b \neq 0$. Sei P_g die Periode so einer Funktion. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^{P_g} g(x)\mathrm{d}x$$

unabhängig von a ist, geben Sie einen Termausdruck für dieses Integral. Formulieren Sie eine Bedingung, welche a, b und c erfüllen müssen, damit die Stammfunktion von g auch periodisch ist. Finden Sie mindestens eine Wahl für a, b und c, sodass die Funktion g eine nicht-periodische Stammfunktion hat.

(b) $P_n = \frac{2\pi}{n}$, $T(n) = [-\frac{\cos(nx)}{n}]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{n}$, $S(n) = 0$ und $U(n) = nT(n) = 2$.

(c) Weil $P_g = \frac{2\pi}{b}$ gilt

$$\int_0^{P_g} g(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi c}{b}\,.$$

Falls $c = 0$, dann ist die Stammfunktion periodisch. Falls $c \neq 0$, dann nicht, so können wir zB $c = 1$ nehmen, also $g(x) = \sin(x) + 1$.

Aufgabe 4. *NASA.*

Die Erde zieht mit einer Kraft $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ an einem Körper mit Masse m, wobei $M \approx 5,97 \cdot 10^{24} kg$ die Masse der Erde, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ Newtons Gravitationskonstante, und r die Entfernung des Körpers zum Erdmittelpunkt ist. Der Radius R der Erde beträgt $R \approx 6,68 \cdot 10^6$ Meter.

(1 Kompensationspunkt) Interpretieren Sie das Integral $W(h) = -\int_R^{R+h} \frac{GMm}{r^2} \mathrm{d}r$ in diesem Kontext!

(2 Punkte) Die NASA will eine Rakete mit einer Masse von $m = 2,5 \cdot 10^5$ Kilogramm ins Weltall schicken, damit sie auf einer Höhe von etwa 35.786.000 Metern in einer geostationairen Bahn um die Erde kreist. Berechnen Sie die Energiemenge, die dafür notwendig ist.

(1 Punkt) Ein Kilogramm Kerosin liefert eine Energie von 42 Megajoule, m.a.W., der Heizwert von Kerosin beträgt 42 MJ/kg. Berechnen Sie, wie viel Kilogramm Kerosin die Rakete mit an Bord haben muss.

Das Integral ist die Arbeit, die die Erde verrichtet, wenn ein Körper von der Erdoberfläche auf Höhe h gebracht wird.

Das Integral ist die Minus die Energie, die notwendig ist, einen Körper mit Masse m von der Erdoberfläche auf eine Höhe h zu bringen.

Ohne Minus nenne ich es auch richtig.

Man kann also auch sagen: Das Integral gibt an, wie viel ein Körper an (interner und Bewegungs-)Energie verliert, wenn es auf Höhe h gebracht wird.

Da $-W(h) = GMm(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = \frac{GMmh}{R(R+h)}$ so kann man ausrechnen

$$-W = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot 35,786 \cdot 10^6}{6,68 \cdot 10^6 \cdot 42,466 \cdot 10^6} \approx 12,6 \cdot 10^{12}\ J$$

Dieses Ergebnis muss dann noch durch $42 \cdot 10^6$ dividiert werden und dann kommt man auf etwa 299.000 kilogramm. Also, so viel wie die Rakete selbst :-)

Achtung: Bei diesen Zahlen streiken die TR ab und zu anscheinend.