

Planungsblatt Mathematik für die 8A

Woche 13 (von 28.11 bis 02.12)

Hausaufgaben ¹

Bis Mittwoch 14.12:

Erledige und/oder lerne die Aufgaben

Kernbegriffe dieser Woche:

Differenzgleichungen, Folgen, Lineares Wachsen, Exponentielles Wachsen, Freiraum

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- (a) **Mittwoch** (3.Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) einige Aufgaben aus Kapitel 12, (iii) Arbeitsblatt Folgen – Fragen?, (iv) Wiederholung Wahrscheinlichkeit: Text zum Weiterlesen wird ausgeteilt, damit ihr das lange Wochenende sinnvoll beschäftigt seid!

Unterlagen auf www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html

¹Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Arbeitsblatt Folgen

Aufgabe 1. Betrachte die Folge $x_{n+1} = x_n + n^2$ mit $x_0 = 0$. Berechne die ersten Paar Folgenglieder.

Aufgabe 2. Betrachte die Folge $x_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{3} + \frac{n}{2}$. Berechne die ersten Paar Folgenglieder.

Aufgabe 3. Betrachte die Folge $x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n$ mit $x_0 = 1$. Berechne einige Folgenglieder und gib eine Formel!

Aufgabe 4. Betrachte die Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$, wobei $x_0 = 2$. Untersuche den Grenzwert! Untersuche auch, was passiert, für welchen Wert gilt, dass $x_{n+1} = x_n$.

Aufgabe 5. Betrachte die Folge $x_n = n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})$. Untersuche was passiert, wenn $n \rightarrow \infty$.

Was haben jetzt Differenzgleichungen mit Folgen zu tun? Ganz einfach:

Wenn wir eine Folge haben, dann können wir daraus eine Differenzgleichung machen:

Falls zB $x_n = n(n+1)$,

dann also $x_{n+1} = (n+1)(n+2)$

und somit $x_{n+1} - x_n = (n+1)(n+2) - n(n+1) = (n+1)(n+2-n) = 2(n+1)$.

Umgekehrt, wenn wir eine Differenzgleichung $x_{n+1} - x_n = r(K - x_n)$ haben, dann ist also $x_{n+1} = r(K - x_n) + x_n = rK + (1-r)x_n$ eine rekursive Darstellung der Folge.

Folgen und Differenzgleichungen sind also ein und dasselbe Ding.

Eine Folge ist monoton steigend, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n . Monoton fallend definiert man genau so.

Eine Folge ist beschränkt, wenn es eine positive Zahl A gibt, sodass $x_n \in [-A, +A]$ für alle n .

Eine Folge ist unbeschränkt, wenn sie nicht beschränkt ist. Betrachte zum Beispiel die Folge $x_n = n \cdot (-1)^n$. Oder $x_n = 2^n$.

Eine Folge hat einen Grenzwert, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert, und somit eine Zahl ist. Zum Beispiel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$.

Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen

Eine **Ereignismenge** E ist eine Menge, die alle Ereignisse beschreiben kann.

Ein einzelnes **Ereignis** A ist eine Teilmenge dieser Ereignismenge; $A \subset E$. Diese Teilmenge kann auch ein einziges Element haben.

Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** f ist eine Funktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit einigen guten Eigenschaften, die davon abhängen, wie E aussieht. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit f beschrieben, und wir wissen schon, dass alle Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben müssen.

Eine **stochastische Variable** X ist eine Funktion, die jedem Element von E eine reelle Zahl zuordnet, also $X : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Falls X eine stochastische Variable ist, kann man X ihre **Verteilungsfunktion** $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ zuordnen, welche durch $F_X(x) = P(X \leq x)$ definiert ist. Die Verteilungsfunktion ist monoton steigend, denn falls $x < x'$, dann $P(X \leq x') = P(X \leq x) + P(x < X \leq x') \geq P(X \leq x)$.

Zwei Beispiele:

(1) Einmaliges Werfen mit zwei Spielwürfeln. Alle Einzelereignisse werden durch Zahlenpaare (a, b) beschrieben, wobei $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sagen wir, a ist die Augenzahl des ersten Würfels, b die des zweiten. Somit ist E die Menge aller Zahlenpaare (a, b) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. E ist dann eine diskrete Menge; man kann die Elemente abzählen, und das ist hier recht einfach, denn es gibt nur endlich viele, und zwar 36. Die meist benutzte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E ist die sogenannte uniforme Verteilung; jedes Einzelereignis (a, b) ist gleich wahrscheinlich. Somit ist unser f dann die Funktion, die jedem Zahlenpaar (a, b) den Wert $\frac{1}{36}$ zuordnet. Falls A eine Teilmenge von E ist, dann hat sie eine Anzahl an Einzelereignissen, sagen wir n_A , dann ist $P(A) = \frac{n_A}{36}$. Wenn zum Beispiel A das Ereignis ist „Summe der Augenzahlen der beiden Würfeln ist durch 5 teilbar“, dann finden wir $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 5), (4, 6), (6, 4)\}$, sodass $n_A = 7$ und $P(A) = \frac{7}{36}$. Die Funktion $X : (a, b) \mapsto a^2 + b^2$ ist eine stochastische Variable, und $P(X = 6) = 0$, aber $P(X > 0) = \frac{35}{36}$.

(2) Die Binomialverteilung wird durch zwei Zahlen beschrieben: n gibt an, wie oft ein einfaches Experiment wiederholt wird, und p ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem einfachen Experiment Erfolg zu haben. Es sei X die Anzahl der Erfolge bei n einfachen Experimenten, somit ist X schon eine stochastische Variable, und der Ereignisraum E wird also mithilfe von X aufgebaut. Wir haben

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Somit $E = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung f hat die Werte $f(k) = P(X = k)$. Für die stochastische Variable X findet man die Verteilungsfunktion F_X definiert durch

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Obige Beispiele zeigen nur diskrete Ereignisräume. Die Wahrscheinlichkeiten sind dann auch stets mit Summen zu berechnen. Bei stetigen Verteilungen ist das nicht so. Die Wahrscheinlichkeiten bekommen wir dann indem wir eine sogenannte Dichtefunktion f integrieren. Ich versuche wieder einige Beispiele zu geben:

(3) Ein Physiker (wer denn sonst?) hat ein Uranatom in einer Schachtel eingesperrt. Dieses Atom kann zerfallen, und dabei bricht das Uranatom in mehrere Stücke auseinander. Der Physiker kann natürlich nicht jede Zeit hingucken, und berechnen, wann so ein Atom zerfällt ist prinzipiell nicht möglich; der Zerfallsprozess ist ein inherenter Zufallsprozess. Am Anfang, sagen wir zur Zeit $t = 0$, weiß man sicher, das Uranatom ist noch da. Sei T die Zeit, zu der das Uranatom zerfällt. Dann kann T im Prinzip alle positiven reellen Zahlen annehmen. Die Frage, was ist $P(T = t)$ ist dann sinnlos! Denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten soll 1 sein, aber wir können nicht über alle reellen Zahlen summieren; zwischen je zwei reellen Zahlen gibt es unendlich viele andere reelle Zahlen! Hier ist dann die Verteilungsfunktion eher eine Hilfe: $P(T \leq t)$ macht hier sinn! Wir wissen zum Beispiel schon, dass $P(T \leq 0) = 0$, da das Atom zu $t = 0$ noch vorhanden war. Auch wissen wir, dass $P(T \leq \infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(T \leq t) = 1$, denn das Atom muss ja irgendwann zerfallen. Auch wissen wir, dass die Verteilungsfunktion monoton steigend ist. Mit der Verteilungsfunktion können wir auch $P(T \in (a, b)) = P(T \leq b) - P(T \leq a)$ ausrechnen.

In vielen Fällen können wir die Verteilungsfunktion F als Integral einer Dichtefunktion f schreiben. Folgende Beziehungen sind hier einigermaßen natürlich, und sogar beispielhaft für das, was wir bald behandeln werden:

$$f(t) = \frac{d}{dt}P(T \leq t)$$

$$P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(s)ds$$

$$P(T \leq \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds = 1$$

$$P(T \in [a, b]) = \int_a^b f(s)ds$$

$$P(T = t) = 0.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass jeder einzelne Wert für T die Wahrscheinlichkeit Null hat. Darum gilt auch $P(T \in [a, b]) = P(T \in (a, b)) = P(T \in [a, b))$, denn die Randpunkte haben Wahrscheinlichkeit Null².

In diesem konkreten Beispiel wird der Physiker seine Hausaufgaben wohl gemacht haben, und er weiß, dass $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ für positive t und sonst Null, also $f(t) = 0$ wenn $t \leq 0$. Somit finden wir auch

$$P(T \leq \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} = [-e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 1.$$

Und auch, dass

$$P(T \leq t) = \int_0^t f(s)ds = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Im Besonderen sehen wir wieder, dass $P(T \leq 0) = 1 - e^0 = 0$.

Die Aufgabe des Experimentalphysikers ist es diesen Parameter λ zu bestimmen. Diese ist natürlich durch die Halbwertszeit bestimmt! Ein anderes Mal mehr dazu ...

(3) Wie schnell sind Moleküle in einem Gas? Diese Frage stellten sich Ludwig Boltzmann (aus Wien) und James Clark Maxwell (England) sich auch. Die Gasmoleküle bewegen sich sehr chaotisch durch einander, somit kann man die Frage besser mit Wahrscheinlichkeiten beantworten. Die Moleküle werden wohl verschiedene Geschwindigkeiten haben, und wenn wir ein Molekül herausnehmen, und seine Geschwindigkeit bestimmen, werden wir wohl ein Ergebnis bekommen, das auch durch Zufall bestimmt ist. Sei jetzt v diese gemessene Geschwindigkeit eines herausgenommenes Molekül. Dann ist $P(v = x)$ genau so wie oben sinnlos, denn v kann halt viele, un abzählbar viele reelle Werte annehmen. Die Geschwindigkeit (Größe des Geschwindigkeitsvektors, also eigentlich Tempo) ist positiv, so wie oben T war. Boltzmann und Maxwell suchten daher eine Funktion f , sodass $P(v \in [a, b]) = \int_a^b f(s) ds$. Mit etwas Physik kamen sie bald zum Schluss, dass

$$f(x) = Cx^2 e^{-x^2/a}$$

wobei a und C positive Zahlen sind. a hat mit der mittleren Geschwindigkeit (also mit der Temperatur) zu tun, und C muss so bestimmt werden, dass $\int_0^\infty f(s) ds = 1$; mit etwas Übung findet man die Beziehung $C = \frac{4}{\sqrt{a^3\pi}}$. Obwohl wir dieses Integral noch nicht machen können, kann man sich schon vorstellen, wie ein Physiker jetzt die mittlere Geschwindigkeit $E(v)$ ausrechnen kann. Statt $\sum xP(v = x)$ auszurechnen, muss er jetzt $\int xf(x) dx$ ausrechnen. Interessanterweise könnt ihr dieses Integral schon tun, man muss halt partiell integrieren, aber das ersparen wir uns jetzt, und überlassen das den fleißigen Schülern/Schülerinnen.

Im Untenstehenden Diagramm siehst du einige dieser Funktionen für verschiedene Werte von a (verschiedene Temperaturen). Die Flächeninhalte korrespondieren mit Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit im Intervall $[a, b]$ liegt ist genau der Fläche unter dem Graphen im Intervall $[0, 1]$. Dieses Bild sollte man gut vor Augen haben! Für jedes a gibt es hier eine neue Verteilung, und um Wahrscheinlichkeiten auszurechnen, muss man halt die richtige Funktion über das richtige Intervall integrieren

