Planungsblatt Mathematik für die 8A

Woche 15 (von 12.12 bis 19.12)

Hausaufgaben [1]

Bis Donnerstag 15.12:
Ihr seid Donnerstag auf Ausflug, somit ist das Programm bis Freitag etwas mehr!

Bis Freitag 16.12:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 5.01 bis 5.05
Bitte den Text von Seite 76 bis hin zu Seite 80 aufmerksam lesen und verinnerlichen! Dazu sollte man auch den Text zu Verteilungen und Wahrscheinlichkeiten hier weiter unten gut studiert haben! (War ja eigentlich schon.bis Mittwoch vorgesehen.)

Bis Mittwoch 21.12:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 5.07, 5.09(a), 5.10(c), 5.11(b), 5.13 und 5.14.

Kernbegriffe dieser Woche:

Verteilung P, Dichtefunktion f, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$, Standardnormalverteilung $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ.

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Mittwoch (3.Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) Die Normalverteilung: Wir nehmen gemeinsam die Seiten 76, 77 und 78 durch, machen dabei 5.01, 5.02, 5.03, 5.04 und weiter bis hin zu 5.05 durch

(b) Donnerstag (4.Std): Ihr seid mit Biologie auf einen Ausflug. Bitte darum aber den unterstehenden Text zu Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen lesen und gut studieren! Ich gehe davon aus, dass der Inhalt bekannt ist, und dass eventuelle Fragen dann gestellt werden! Pauschale, unkonkrete Fragen bewerte ich als Eingeständnis, den Text nicht aufmerksam gelesen zu haben!

(c) Freitag (1.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) Normal- und Standardnormalverteilung: 5.07, 5.09(a), 5.10(c), 5.11(b), 5.13 und 5.14

> **Wichtiger Satz**:
> Falls X normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standard normal verteilt.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen

Eine **Ereignismenge** E ist eine Menge, die alle Ereignisse beschreiben kann.

Ein einzelnes **Ereignis** A ist eine Teilmenge dieser Ereignismenge; $A \subset E$. Diese Teilmenge kann auch ein einziges Element haben.

Eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung** f ist eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit einigen guten Eigenschaften, die davon abhängen, wie E ausschaut. Die Wahrscheinlichkeiten werden mit f beschrieben, und wir wissen schon, dass alle Wahrscheinlichkeiten zusammen 1 ergeben müssen.

Eine **stochastische Variable** X ist eine Funktion, die jedem Element von E eine reelle Zahl zuordnet, also $X : E \to \mathbb{R}$.

Falls X eine stochastische Variable ist, kann man X ihre **Verteilungsfunktion** $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ zuordnen, welche durch $F_X(x) = P(X \leq x)$ definiert ist. Die Verteilungsfunktion ist monoton steigend, denn falls $x < x'$, dann $P(X \leq x') = P(X \leq x) + P(x < X \leq x') \geq P(X \leq x)$.

Zwei Beispiele:

(1) Einmaliges Werfen mit zwei Spielwürfeln. Alle Einzelereignisse werden durch Zahlenpaare (a, b) beschrieben, wobei $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sagen wir, a ist die Augenzahl des ersten Würfels, b die des zweiten. Somit ist E die Menge aller Zahlenpaare (a, b) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. E ist dann eine diskrete Menge; man kann die Elemente abzählen, und das ist hier recht einfach, denn es gibt nur endlich viele, und zwar 36. Die meist benutzte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E ist die sogenannte uniforme Verteilung; jedes Einzelereignis (a, b) ist gleich wahrscheinlich. Somit ist unser f dann die Funktion, die jedem Zahlenpaar (a, b) den Wert $\frac{1}{36}$ zuordnet. Falls A eine Teilmenge von ist, dann hat sie eine Anzahl an Einzelereignissen, sagen wir n_A, dann ist $P(A) = \frac{n_A}{36}$. Wenn zum Beispiel A das Ereignis ist „Summe der Augenzahlen der beiden Würfeln ist durch 5 teilbar“, dann finden wir $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 5), (4, 6), (6, 4)\}$, sodass $n_A = 7$ und $P(A) = \frac{7}{36}$. Die Funktion $X : (a, b) \mapsto a^2 + b^2$ ist eine stochastische Variable, und $P(X = 6) = 0$, aber $P(X > 0) = \frac{35}{36}$.

(2) Die Binomialverteilung wird durch zwei Zahlen beschrieben: n gibt an, wie oft ein einfaches Experiment wiederholt wird, und p ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem einfachen Experiment Erfolg zu haben. Es sei X die Anzahl der Erfolge bei n einfachen Experimenten, somit ist X schon eine stochastische Variable, und der Ereignisraum E wird also mithilfe von X aufgebaut. Wir haben

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} .$$

Somit $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ unf die Wahrscheinlichkeitsverteilung f hat die Werte $f(k) = P(X = k)$. Für die stochastische Variable X findet man die Verteilungsfunktion f_X definiert durch

$$F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i} .$$

Obige Beispiele zeigen nur diskrete Ereignisräume. Die Wahrscheinlichkeiten sind dann auch stets mit Summen zu berechnen. Bei stetigen Verteilungen ist das nicht so. Die Wahrscheinlichkeiten bekommen wir dann indem wir eine sogenannte Dichtefunktion f integrieren. Ich versuche wieder einige Beispiele zu geben:

(3) Ein Physiker (wer denn sonst?) hat ein Uranatom in einer Schachtel eingesperrt. Dieses Atom kann zerfallen, und dabei bricht das Uranatom in mehrere Stücke auseinander. Der Physiker kann natürlich nicht jede Zeit hingucken, und berechnen, wann so ein Atom zerfällt ist prinzipiell nicht möglich; der Zerfallsprozess ist ein inherenter Zufallsprozess. Am Anfang, sagen wir zur Zeit $t = 0$, weiß man sicher, das Uranatom ist noch da. Sei T die Zeit, zu der das Uranatom zerfällt. Dann kann T im Prinzip alle positiven reellen Zahlen annehmen. Die Frage, was ist $P(T = t)$ ist dann sinnlos! Denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten soll 1 sein, aber wir können nicht über alle reellen Zahlen summieren; zwischen je zwei reellen Zahlen gibt es unendlich viele andere reelle Zahlen! Hier ist dann die Verteilungsfunktion eher eine Hilfe: $P(T \le t)$ macht hier sinn! Wir wissen zum Beispiel schon, dass $P(T \le 0) = 0$, da das Atom zu $t = 0$ noch vorhanden war. Auch wissen wir, dass $P(T \le \infty) := \lim_{t\to\infty} P(T \le t) = 1$, denn das Atom muss ja irgendwann zerfallen. Auch wissen wir, dass die Verteilungsfunktion monoton steigend ist. Mit der Verteilungsfunktion können wir auch $P(T \in (a, b]) = P(T \le b) - P(T \le a)$ ausrechnen.
In vielen Fällen können wir die Verteilungsfunktion F als Integral einer Dichtefunktion f schreiben. Folgende Beziehungen sind hier einigermaßen natürlich, und sogar beispielhaft für das, was wir bald behandeln werden:

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(T \le t)$$

$$P(T \le t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\mathrm{d}s$$

$$P(T \le \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\mathrm{d}s = 1$$

$$P(T \in [a, b]) = \int_{a}^{b} f(s)\mathrm{d}s$$

$$P(T = t) = 0\,.$$

Die letzte Gleichung besagt, dass jeder einzelne Wert für T die Wahrscheinlichkeit Null hat. Darum gilt auch $P(T \in [a, b]) = P(T \in (a, b]) = P(T \in [a, b))$, denn die Randpunkte haben Wahrscheinlichkeit Null[2].
In diesem konkreten Beispiel wird der Physiker seine Hausaufgaben wohl gemacht haben, und er weiß, dass $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ für positive t und sonst Null, also $f(t) = 0$ wenn $t \le 0$. Somit finden wir auch

$$P(T \le \infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\mathrm{d}s = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} = [-e^{-\lambda t}]_0^\infty = -e^{-\infty} + e^0 = 1\,.$$

Und auch, dass

$$P(T \le t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s = 1 - e^{-\lambda t}\,.$$

Im Besonderen sehen wir wieder, dass $P(T \le 0) = 1 - e^0 = 0$.
Die Aufgabe des Experimentalphysikers ist es diesen Parameter λ zu bestimmen. Diese ist natürlich durch die Halbwertszeit bestimmt! Ein anderes Mal mehr dazu ...

(3) Wie schnell sind Moleküle in einem Gas? Diese Frage stellten sich Ludwig Boltzmann (aus Wien) und James Clark Maxwell (England) sich auch. Die Gasmoleküle bewegen sich sehr chaotisch durch einander, somit kann man die Frage besser mit Wahrscheinlichkeiten beantworten. Die Moleküle werden wohl verschiedene Geschwindigkeiten haben, und wenn wir ein Molekül herausnehmen, und seine Geschwindigkeit bestimmen, werden wir wohl ein Ergebnis bekommen, das auch durch Zufall bestimmt ist. Sei jetzt v diese gemessene Geschwindigkeit eines herausgenommenes Molekül. Dann ist $P(v = x)$ genaus so wie oben sinnlos, denn v kann halt viele, unabzählbar viele reelle Werte annehmen. Die Geschwindigkeit (Größe des Geschwindigkeitsvektors, also eigentlich Tempo) ist positiv, so wie oben T war. Boltzmann und Maxwell suchten daher eine Funktion f, sodass $P(v \in [a, b] = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s$. Mit etwas Physik kamen sie bald zum Schluss, dass

$$f(x) = Cx^2 e^{-x^2/a}$$

wobei a und C positive Zahlen sind. a hat mit der mittleren Geschwindigkeit (also mit der Temperatur) zu tun, und C muss so bestimmt werden, dass $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}s = 1$; mit etwas Übung findet man die Beziehung $C = \frac{4}{\sqrt{a^3\pi}}$. Obwohl wir dieses Integral noch nicht machen können, kann man sich schon vorstellen, wie ein Physiker jetzt die mittlere Geschwindigkeit $E(v)$ ausrechnen kann. Statt $\sum xP(v = x)$ auszurechnen, muss er jetzt $\int xf(x)\mathrm{d}x$ ausrechnen. Interessanterweise könnt ihr dieses Integral schon tun, man muss halt partiell integrieren, aber das ersparen wir uns jetzt, und überlassen das den fleißigen Schülern/Schülerinnen.
Im Untenstehenden Diagramm siehst du einige dieser Funktionen für verschiedene Werte von a (verschiedene Temperaturen). Die Flächeninhalte korrespondieren mit Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit im Intervall $[a, b]$ liegt ist genau der Fläche unter dem Graphen im Intervall $[0, 1]$. Dieses Bild sollte man gut vor Augen haben! Für jedes a gibt es hier eine neue Verteilung, und um Wahrscheinlichkeiten auszurechnen, muss man halt die richtige Funktion über das richtige Intervall integrieren