Planungsblatt Mathematik für die 8A

Woche 19 (von 23.01 bis 27.01)

Hausaufgaben [1]

Bis Donnerstag 26.01:
Lerne sehr aufmerksam die Seiten 108, 109 und 110 aus dem Buch!

Bis Freitag 27.01:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 6.21, 6.22, 6.23 und 6.24.

Bis Mittwoch 01.02:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 6.28 und 6.29. Studiere auch die Buchseiten 108, 109, 110 und 114.
Ich habe für euch eine alte HÜ ausgearbeitet, und du findest sie hier unten!
Zu Konfindenzintervallen gibt es noch eine Erklärung, und du findest sie hier unten!

Kernbegriffe dieser Woche:

Verteilung P, Dichtefunktion f, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$, Standardnormalverteilung $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. γ-Schätzbereich, γ-Konfidenzintervall

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Mittwoch (3.Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) Aufgaben 6.15, 6.16, (iii) Testen! Seiten 108 und 109 lesen

(b) Donnerstag (4.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Aufgabe 6.21 und den Text herum, (iii) Aufgaben 6.22, 6.23 und 6.24

(c) Freitag:

(d) Freitag (1.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) Aufgaben 6.28 und 6.29, mitsamt den Text auf Seite 114

> **Wichtiger Satz**:
> Falls X normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ, dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standard normal verteilt.

> **Wichtige Tatsache**:
> Falls X binomialverteilt ist mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$, sodass $np(1-p)$, dann kann man die Verteilung von X mit der Normalverteilung annähern, wobei man dann nimmt $\mu = E(X) = np$ und $\sigma^2 = E(X^2) - (EX)^2 = np(1-p)$.
> Also $P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < z\right) \approx \Phi(z)$ wenn z nicht zu weit von Null liegt.

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Konfidenzintervalle:
Ein Konfidenzintervall ist von der Form

$$p \in [h - \Delta; h + \Delta]$$

und $\Delta = z\sqrt{\frac{h(1-h}{n}}$, wobei z so gewählt wird, dass $\Phi(z) - \Phi(-z) = \gamma$, wobei γ die Sicherheit ist.

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

AUSARBEITUNG

Aufgabe: (i) Es sei f ein Polynom von Grad 17. Begründe, dass f mindestens eine Nullstelle hat. (ii) Betrachte die Funktion $f(x) = (|x| - x)^2$. Untersuche f auf Stetigkeit (und Differenzierbarkeit) und erstelle den Graphen von f. Hinweis: Fallunterscheiden $f(x) = \ldots$ wenn $x > 0$ und $\ldots$ (iii) Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 \cdot e^{-x^2}$. Berechne $f(0)$, $f'(0)$ und $f''(0)$, erstelle einen Graphen von f und begründe, dass 0 eine lokale Minimumstelle ist.

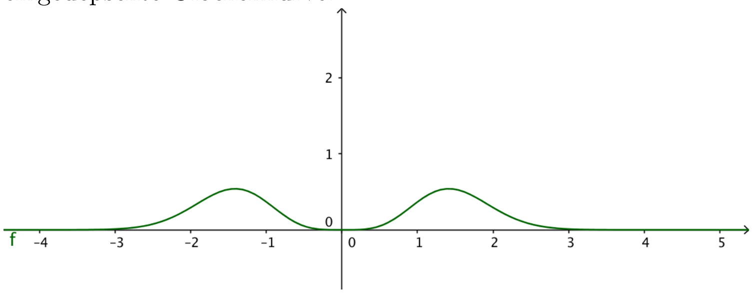
Lösung.
(i) f ist von der Form $f(x) = ax^{17} + bx^{16} + \ldots$. Falls x in Betrag groß wird, gewinnt der Term ax^{17} von allen anderen und ist somit dominant. Es gilt dann

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^{17}$$

und falls $a > 0$ ist der Grenzwert also $+\infty$, falls $x < 0$ dann ist der Grenzwert $-\infty$. Es gilt aber auch

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^{17}$$

und falls $a > 0$ ist der Grenzwert also $-\infty$, falls $x < 0$ dann ist der Grenzwert $+\infty$. In beiden Fällen wechselt f also von Zeichen! Da f auch noch stetig ist, muss es alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen, so auch den Wert Null.
(ii) Falls $x > 0$, dann ist $|x| = x$ und somit ist dann $f(x) = 0$. Wenn $x < 0$, dann ist $|x| = -x$ und somit ist dann $f(x) = (2x)^2 = 4x^2$. Nun, die Funktionen $h(x) = 0$ und $g(x) = 4x^2$ haben folgende Eigenschaften: $h(0) = 0$, $g(0) = 0$, $h'(0) = 0$ und $g'(0) = 0$. Nun fällt f mit h zusammen für positive x und f fällt mit g zusammen für negative x. Die die Ableitungen und die Funktionswerte bei $x = 0$ zusammenpassen, ist f sowohl stetig wie differenzierbar. Aber, f ist nicht zweimal differenzierbar, wie du selbst kontrollieren kannst.
(iii) $f(0) = 0$, $f'(x) = (4x^3 - 2x^5)e^{-x^2}$ sodass $f'(0) = 0$. $f''(x) = (12x^2 - 18x^4 + 4x^6)e^{-x^2}$ sodass $f''(0) = 0$. Sogar die dritte Ableitung ist Null bei $x = 0$. Trotzdem ist $x = 0$ eine Minimumstelle. Warum? Ganz einfach, wenn $x \neq 0$, dann ist $f(x) > 0$. Die Stelle $x = 0$ ist die einzige Nullstelle und f ist weiter immer größer als Null, also ist der f-Wert bei $x = 0$ am niedrigsten, das ist also genau was man unter einem Minimum versteht. Der Graph ist wie eine eingedepschte Glockenkurve:



Konfidenzintervalle, was ist die Idee?

Stell dir vor, wir wollen wissen, wie viel Prozent der Bevölkerung Linkshänder ist. Wir befragen 1000 Personen, unf finden 125 Linkshänder. Können wir dann schließen, der Anteil sei $12,5\%$? Der Anteil könnte natürlich auch 10% sein. Nehmen wir mal an, $p = 0,1$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Stichprobe von 1000 Personen genau 125 Linkshänder zu finden wirklich klein, aber nicht Null. Wie bei stetigen Verteilungen können wir aber besser mit Intervallen arbeiten. Legen wir daher ein sogenanntes Sicherheitsniveau fest, $\gamma = 0,95$. Was machen wir denn damit?

Da die Stichprobe relativ groß ist, können wir eine Normalverteilung $\mu = np = 1000 \cdot 0,1 = 100$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 9,5$. Zu $\gamma = 0,95$ gehört $z = 1,96$. Mit 95% Wahrscheinlichkeit werden wir also einen Wert im Intervall $[91,4; 118,6]$ für die Anzahl der Linkshänder finden. Die Anzahl 125 liegt nicht drinnen. Darum würde ich sagen, die Annahme $p = 0,1$ ist nicht kompatibel mit dem gemessenen Wert.

Wir können jetzt mal ausprobieren, was ist mit der Annahme $p = 0,12$? Wir finden jetzt $\mu = 120$ und $\sigma \approx 10,3$. Somit gibt es ein 95%-Intervall $I = [99,9; 140,1]$ um den Erwartungswert 120, das mit die Werte für eine Stichprobe mit 95% Wahrscheinlichkeit umfasst. Jetzt liegt der Wert 125 in unserem Intervall.

Wie man sieht kann man für jeden p-Wert ein Intervall finden, das entweder unseren gemessenen Wert 125 umfasst, oder nicht. Somit gibt es gute p-Werte, und nicht gute p-Werte. Ein Konfidenzintervall für p ist genau das Intervall mit den guten Werten von p.

Achtung: die Intervalle eines jeden p-Wertes sind von einigen Faktoren abhängig: von γ, von n und von p selbst. Der γ-Wert bestimmt den z-Wert und das Intervall ist dann gegeben durch

$$I(p, \gamma, n) = [p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}] .$$

Nun werden wir durch Messung von h schon eine Ahnung von p haben; klar ist, dass p und h in der Nähe von einander sein müssen; dies ist eine Wirkung des Gesetz der großen Zahlen! Wir können uns das Leben leichter machen, indem wir dann schreiben

$$I(p, \gamma, n) \approx [p - z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; p + z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}] .$$

Ein p-Wert ist dann gut, wenn $h \in I(p, \gamma, n)$. Und, mit etwas Algebra (siehe Buch oder Notizen) finden wir dann dass p genau dann gut ist, wenn

$$p \in [h - z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}] .$$

Das ist dann das Konfidenzintervall für p mit Sicherheitsniveau γ. Für unser Beispiel:

$$p \in [0,125 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{1000}}; 0,125 + 1,96\sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{1000}}] = [0,105; 0,145] .$$