

Planungsblatt Mathematik für die 8A

Woche 20 (von 30.01 bis 03.02)

Hausaufgaben ¹

Bis Donnerstag 02.02:

Erledige und/oder lerne die Aufgaben 6.29, 6.30, 6.32 und 6.34

Bis Freitag 03.02:

Erledige und/oder lerne die Aufgaben 6.36, 6.39 und 6.40.

Bis Mittwoch 15.02:

Erledige und/oder lerne die Aufgaben 6.42, 6.45 und 6.46.

Finde und studiere Typ-1 Aufgaben zu Statistik und Konfidenzintervallen auf der Website des Bildungsministeriums! **Nimm** welche mit!

Kernbegriffe dieser Woche:

Verteilung P , Dichtefunktion f , Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$, Standardnormalverteilung $\varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ . γ -Schätzbereich, γ -Konfidenzintervall, Hypothesen-Tests

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

- (a) **Mittwoch** (3.Std): (i) HÜ-Bespr., (ii) Aufgaben 6.29, 6.30, 6.32 und 6.34
- (b) **Donnerstag** (4.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Aufgaben 6.36, 6.39 und 6.40
- (c) **Freitag**:
- (d) **Freitag** (1.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) Aufgaben 6.42, 6.45 und 6.46

Wichtiger Satz:

Falls X normalverteilt ist mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ , dann ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standard normal verteilt.

Wichtige Tatsache:

Falls X binomialverteilt ist mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$, sodass $np(1-p)$, dann kann man die Verteilung von X mit der Normalverteilung annähern, wobei man dann nimmt $\mu = E(X) = np$ und $\sigma^2 = E(X^2) - (EX)^2 = np(1-p)$.
--

Also $P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < z\right) \approx \Phi(z)$ wenn z nicht zu weit von Null liegt.

¹Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Konfidenzintervalle:

Ein Konfidenzintervall ist von der Form

$$p \in [h - \Delta; h + \Delta]$$

und $\Delta = z \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$, wobei z so gewählt wird, dass $\Phi(z) - \Phi(-z) = \gamma$, wobei γ die Sicherheit ist.

Konfidenzintervalle, was ist die Idee?

Stell dir vor, wir wollen wissen, wie viel Prozent der Bevölkerung Linkshänder ist. Wir befragen 1000 Personen, und finden 125 Linkshänder. Können wir dann schließen, der Anteil sei 12,5%? Der Anteil könnte natürlich auch 10% sein. Nehmen wir mal an, $p = 0,1$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Stichprobe von 1000 Personen genau 125 Linkshänder zu finden wirklich klein, aber nicht Null. Wie bei stetigen Verteilungen können wir aber besser mit Intervallen arbeiten. Legen wir daher ein sogenanntes Sicherheitsniveau fest, $\gamma = 0,95$. Was machen wir denn damit?

Da die Stichprobe relativ groß ist, können wir eine Normalverteilung $\mu = np = 1000 \cdot 0,1 = 100$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 9,5$. Zu $\gamma = 0,95$ gehört $z = 1,96$. Mit 95% Wahrscheinlichkeit werden wir also einen Wert im Intervall $[91,4; 118,6]$ für die Anzahl der Linkshänder finden. Die Anzahl 125 liegt nicht drinnen. Darum würde ich sagen, die Annahme $p = 0,1$ ist nicht kompatibel mit dem gemessenen Wert.

Wir können jetzt mal ausprobieren, was ist mit der Annahme $p = 0,12$? Wir finden jetzt $\mu = 120$ und $\sigma \approx 10,3$. Somit gibt es ein 95%-Intervall $I = [99,9; 140,1]$ um den Erwartungswert 120, das mit die Werte für eine Stichprobe mit 95% Wahrscheinlichkeit umfasst. Jetzt liegt der Wert 125 in unserem Intervall.

Wie man sieht kann man für jeden p -Wert ein Intervall finden, das entweder unseren gemessenen Wert 125 umfasst, oder nicht. Somit gibt es gute p -Werte, und nicht gute p -Werte. Ein Konfidenzintervall für p ist genau das Intervall mit den guten Werten von p .

Achtung: die Intervalle eines jeden p -wertes sind von einigen Faktoren abhängig: von γ , von n und von p selbst. Der γ -Wert bestimmt den z -Wert und das Intervall ist dann gegeben durch

$$I(p, \gamma, n) = [p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}].$$

Nun werden wir durch Messung von h schon eine Ahnung von p haben; klar ist, dass p und h in der Nähe von einander sein müssen; dies ist eine Wirkung des Gesetz der großen Zahlen! Wir können uns das Leben leichter machen, indem wir dann schreiben

$$I(p, \gamma, n) \approx [p - z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; p + z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}].$$

Ein p -Wert ist dann gut, wenn $h \in I(p, \gamma, n)$. Und, mit etwas Algebra (siehe Buch oder Notizen) finden wir dann dass p genau dann gut ist, wenn

$$p \in [h - z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + z\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}].$$

Das ist dann das Konfidenzintervall für p mit Sicherheitsniveau γ . Für unser Beispiel:

$$p \in [0,125 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{1000}}; 0,125 + 1,96 \sqrt{\frac{0,125 \cdot 0,875}{1000}}] = [0,105; 0,145].$$