Planungsblatt Mathematik für die 8A

Woche 7 (von 17.10 bis 21.10)

Hausaufgaben [1]

Bis Donnerstag 20.10:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben vom Arbeitsblatt zu Analyse.

Bis Freitag 21.10:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 4.01, 4.02 und 4.03. Drucke dir auch nach Bedarf das Hand-Out zu Finanz-Mathematik aus.

Bis Mittwoch 26.10:
Erledige und/oder lerne die Aufgaben 4.04, 4.05, 4.07, 4.09, 4.10, 4.11, 4.14 und 4.16. GeoGebra benutzen ist sicherlich erlaubt, und ab und zu ratsam!

Kernbegriffe dieser Woche:

Geschwindigkeit, Beschleunigung, Volumen, Drehkörper, Arbeit, Leistung, Betriebsoptimum, Stückkosten, Grenzkosten, Kostenverlauf

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Mittwoch (3.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) BIFIE-Aufgaben? (iii) das Arbeitsblatt zu Analyse (siehe unten)

(b) Donnerstag (4.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Arbeitsblatt fertigbesprechen, (iii) Finanzmathematik Hand-Out besprechen. Link dazu:

`http://www.mat.univie.ac.at/~westra/wenzgasse_2015_2016/klasse8D_M/finanzmathematik_handout.pdf`

(iv) Wir können auch schon Seiten 62, 63 und 64 studieren und dann 4.01, 4.02 und 4.03 machen

(c) Freitag (1.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH (ii) 4.04 und 4.05 (GeoGebra?), 4.07, 4.09, 4.10 und 4.11, (iii) die Sätze auf S. 67 und damit 4.14 und 4.16

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Einige Notizen zu Integration

- Rotationskörper: Entweder $V = \int \pi x^2 \mathrm{dy}$ (um y-Achse drehen) oder $V = \int \pi y^2 \mathrm{d}x$ (um x-Achse drehen). Dabei ist als entweder x in y auszudrücken, oder umgekehrt.
- Arbeit ist Kraft mal Weg, wenn aber die Kraft nicht konstant ist: $W = \int F \mathrm{d}x$.
- Impuls (Stoß) ist Kraft mal Zeit: $\Delta p = \int F \mathrm{d}t$. Oder merke dir $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$.
- Energie ist Leistung mal Zeit: $E = \int P(t)\mathrm{d}t$. Oder merke dir $P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$
- Ladung ist Stromstärke mal Zeit: $Q = \int I \mathrm{d}t$.
- Figur in Schreiben aufgeteilt: $V = \int A(z)\mathrm{d}z$.
- $s(t) = s_0 + \int_0^t v(t')\mathrm{d}t'$; $v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\mathrm{d}t'$.
- Substitutionsregel: Falls $x = x(t)$, dann $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$, wobei $a = x(c)$ und $b = x(d)$.

Einige Aufgaben zu Analyse

Aufgabe 1. Differenziere die folgenden Funktionen und gib an, welche Differenzierregeln du dabei benutzt hast:

A	$f(x) = xe^x$
B	$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
C	$f(x) = \ln(\cos(x))$
D	$f(x) = \ln(\sin(x))$
E	$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$
F	$f(x) = \sqrt{(1-x^2)}$

Aufgabe 2. Aus der Speziellen Relativitätstheorie wird die kinetische Energie eines Körpers mit Masse m und Geschwindigkeit v durch folgende Formel gegeben:

$$E_{kin}(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

In dieser Aufgabe werde wir zeigen, dass für niedrige Geschwindigkeiten die Unterstufenformel $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ zurückgefunden wird - bis auf einen Term, der der Ruhe-Energie entspricht.
(a). Bestimme $E_{kin}(0)$.
Eine Technik, um Funktionen zu analysieren, besteht darin, sie durch Polynome anzunähern. Man könnte also hoffen, dass es Koeffizienten a, b, c usw. gibt, sodass in guter Annäherung gilt:

$$f(x) \approx a + bx + cx^2 + \dots$$

Solange man daran interessiert ist, das Verhalten in der Nähe von $x = 0$ zu bestimmen, reicht es oft, nur die ersten paar Terme in der Polynomexpansion zu betrachten. Wir werden also diese Ellipsis in der obigen Formel weglassen. a, b und c in der Annäherung $f(x) \approx a + bx + cx^2$ (für kleine x) werden dann so bestimmt, dass die Ableitungen in Null passen:

$$f(0) = a\,, \quad f'(0) = b\,, f''(0) = 2c\,.$$

(b). Kontrolliere, dass die obigen Identitäten für die Funktion $f(x) = a + bx + cx^2$ stimmen.
(c). Mache eine Skizze vom Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
(d). Bestimme $f(0)$, $f'(0)$ und $f''(0)$ für die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (Achtung, zuerst zweimal differenzieren, dann erst Null einsetzen! Benutze auch die Form $(1-x^2)^{-1/2}$)
(e). Zeige mithilfe von (d), dass $\sqrt{1}1 - x^2 \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$ und kontrolliere, dass das mit deinem Graphen passt.
(f). Benutze die bei (e) erreichte Annäherung um zu zeigen, dass in dem Bereich, in dem $x = v/c$ nicht weit von Null ist, die Annäherung $E_{kin} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$. Somit hast du dann gezeigt, dass die relativistische Bewegungsenergie eine Ruhe-Energie beinhaltet, und sich für niedrige Geschwindigkeiten der klassischen, bekannte $mv^2/2$ annähert.

Aufgabe 3. *Partielle Integration* (Buch S. 57) benutzt folgende Regel: $(fg)' = f'g + gf'$, welche aber auch so aufgeschrieben werden kann: $fg' = (fg)' - f'g$. Daraus folgt folgende Regel:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x\,.}$$

Partielle Integration ist eine Technik um Produkte zu integrieren. In einigen Fallen kann man die Regel der Partiellen Integration auch vermeiden, indem man geschickt ratet. Die Kunst der Partiellen Integration ist es aber, von einer Funktion (hier $g'(x)$) eine Stammfunktion zu finden (hier $g(x)$) und dann die andere Funktion (hier $f(x)$) zu differenzieren. Daher ist es sehr wichtig, die gute Wahl zu treffen: welche Funktion ist f, welche ist g, m.a.W., welche Funktion integrierst du, welche differenzierst du?

(a). Differenziere die Funktion $f(x) = x\ln(x)$ und finde damit eine Stammfunktion für die Logarithmusfunktion $\ln(x)$.

(b). Nimm $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = 1$ und wende Partielle Integration an, um (d)eine Stammfunktion der Logarithmusfunktion $\ln(x)$ zu finden (evt. zu bestätigen).

(c). Differenziere die Funktion $f(x) = xe^x$ um danach eine Stammfunktion zu f zu finden. Wie wäre Partielle Integration hier anwendbar? Wie wären f und g in der obigen Formel zu wählen?

(d). Benutze Partielle Integration für $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4.

(a). Benutze C von Aufgabe 1 um eine Stammfunktion von $\tan(x)$ zu finden.

(b). Differenziere $f(x) = e^{-x^2}$ um eine Stammfunktion von $g(x) = xe^{-x^2}$ zu bestimmen. Finde damit $\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x$. (Dies ist ein Beispiel eines uneigentliches Integral, bei so einem Integral ist mindestens eine Grenze im Unendlichen.)

(c). Wiederhole die Ableitungen von $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$ (Implizites Differenzieren; $f(g(x)) = x$ richtig anwenden). Bestimme damit $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(d). Bestimme $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. Hinweis: Differenziere $\ln(f(x))$ mit der Kettenregel. Wähle dann $f(x)$ geeignet.