
SKRIPTUM WELLEN

Version 1.1.2

In Zusammenarbeit mit der 8B Maturajahr 2017

In diesem Skriptum sind die Notizen von einigen Wochen enthalten. Viele Berechnungen muss man nicht auswendig lernen. Mit verschiedenen Farben wird noch markiert, was wesentlich ist, und was optional ist: Lavendelrot ist optional, Frühlingsgrün ist wesentlich. Formeln oder Gleichungen, die zu verstehen und zu wissen sind, sind die nummerierten, die auch noch in einer Box stehen, aber im Text stehen auch einige. Die nicht nummerierten Gleichungen, die nicht im Text stehen, dienen nur einer Herleitung, somit einem besseren Verständnis, und sind somit als nicht zu reproduzierenden Erklärungen zu betrachten.

§1 Allgemeinheiten

Wellen, oder auch wohl Schwingungen, sind periodische Phänomene. In der Mathematik nennen wir eine Funktion f periodisch, falls es eine positive Zahl P gibt, sodass $f(x + P) = f(x)$ für alle x gilt. In der Physik nennen wir ein Phänomen periodisch, falls das betrachtete System nach einiger Zeit T wieder in der Ausgangslage ist. Für beispielsweise ein Teilchen heißt das, dass nach einer Zeit T alle Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte wieder gleich wie zur Zeit $t = 0$ sind. Wir können aber auch den Luftdruck, oder die Temperatur, oder was auch immer betrachten.

In der Physik gibt es viele Phänomene, die nicht im strikten Sinne periodisch sind. So haben die meisten Wellen nur einen endlichen Bereich, in dem sie sich ausbreiten. Andererseits ist die Periode vielleicht nicht immer ganz fest; es schaut dann halt nur wie eine Welle aus, aber die Periode variiert vielleicht etwas. Ein Beispiel sind Leewellen (siehe Abbildung 1), die durch Störungen in der Landschaft entstehen; wenn der Wind durch eine Berglandschaft geht, stört diese Landschaft die Luft in ihrer Bahn, und so entstehen wellenartige Bewegungen der Luftmassen. Diese Luftmassen bewegen sich dann teilweise unter dem Taupunkt, dann wieder unter dem Taupunkt. Oberhalb des Taupunktes bilden sich dann Wolken, unterhalb des Taupunktes lösen diese sich wieder auf. Obwohl diese Phänomene sehr wohl mittels Wellen zu beschreiben sind, gilt hier eindeutig, dass so eine Beschreibung nur eine Annäherung ist.

Viele Wellenphänomene sehen aus wie „wirkliche“ Wellen; diese haben auch eine räumliche Ausdehnung und an jedem Ort eine zeitliche Abfolge. Was gemeint ist, ist Folgendes: Falls wir für eine beliebige Zeit ein Foto machen, schaut das Fotografierte aus wie eine Welle. Hier kann man an eine wirkliche Wasserwelle denken, oder an Licht, wobei dann die Auslenkung die Größe des elektrischen oder magnetischen Feldes ist. Diese Wellen haben eine räumliche Periode: nach einer bestimmten Entfernung wiederholt sich das Muster. Diese räumliche Periode heißt Wellenlänge. Die Wellenlänge wird meistens, und hier unten auch stets wieder, mit dem Symbol λ (lambda) angedeutet. Die Einheit der Wellenlänge ist m . Für Licht wird aber auch häufig nm (nanometer) benutzt, und es gilt $1\ nm = 10^{-9}m$.

Eine andere Art der Periode ist eine zeitliche Periode; betrachten wir das Phänomen an einem Punkt, so wiederholt sich hier an diesem Punkt das Phänomen zeitlich periodisch. Hier gibt es

Beispiel für periodische Wellen

LEEWELLEN

auf der dem Wind abgewandten Seite (Lee) von Bergen

werden oft von Wolkenbildungen begleitet

Schwerkraftwellen (Schwerkraft für Wellenbildung verantwortlich)

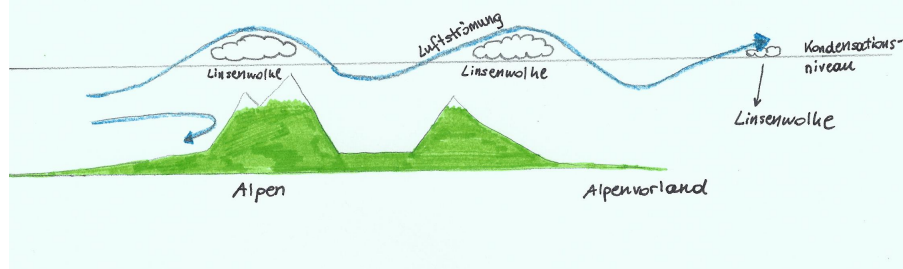


Abbildung 1: Leewellen sind auch periodische Wellen, nur sind sie nicht perfekt periodisch, da sie sich nicht bis ins Unendliche ausdehnen. Auch ist die Periode nur annäherungsweise genau zu definieren. Die Luftbewegungen sind nun einmal nicht perfekt periodisch.

also eine Zeit T , die Periode genannt, nach welcher das Phänomen sich wiederholt. Als Beispiel könnte man auch hier Wasserwellen anführen. Betrachten wir eine Ente auf der Wasseroberfläche, so bewegt sich die Ente beim Passieren einer Wasserwelle auf und ab, auf eine periodische Art. Auch für Licht gilt dasselbe: an jedem Punkt im Raum ist die zeitliche Abfolge des elektrischen oder magnetischen Feldes periodisch. Nennen wir diese Periode T , so ist die Frequenz f durch die Beziehung

$$f = \frac{1}{T} \quad (1)$$

definiert. Die Einheit der Periode ist hier Sekunde s , die der Frequenz s^{-1} , also eins pro Sekunde. Die Frequenz beschreibt, wie viele Wiederholungen eines Zyklus das System pro Sekunde durchführt – die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde einfach gesagt. Die Wasserwellen und elektromagnetische Wellen sind also sowohl räumlich, wie auch zeitlich periodisch. Dies ist also etwas anders als oft in der Schulmathematik behandelt wird.

Wie beschreibt man Wellenphänomene? Oftmals mit periodischen Funktionen wie Sinus und Cosinus. Für räumliche Wellen ist die Standardform $A \sin(kx + \delta)$, wobei k die sogenannte Wellenvektor ist (in mehreren Dimensionen ist kx durch $\vec{k} \cdot \vec{x}$ zu ersetzen). Die Beziehung zwischen Wellenvektor und Wellenlänge ist aber aus der Mathematik bekannt:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (2)$$

Die Größe δ (delta) ist etwas wie die Anfangsphase; der Punkt auf dem Einheitskreis, der mit dem System zur Zeit $t = 0$ korrespondiert. Das Wort Phase wird oft vorkommen, und bedeutet ein Argument von einer Sinus- oder Cosinusfunktion. Somit ist die Phase wie ein Winkel, der eindeutig einen Punkt auf dem Einheitskreis bestimmt. Für eine zeitliche Welle ist die Standardform $A \sin(\omega t + \epsilon)$, wobei ω (omega) die Kreisfrequenz genannt wird. Die Beziehung zwischen Periode

und Kreisfrequenz ist wie oben:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3)$$

Da $f = 1/T$, gilt auch

$$\omega = 2\pi f, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (4)$$

Die Größe ϵ ist auch hier eine Anfangsphase.

Ein Wellenphänomen wie Licht erfordert eine Ausdehnung der schulmathematischen Reichweite: Sie kann mit einer Welle von der Form

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

Für jeden festen x haben wir eine zeitlich periodische Funktion und für jede feste Zeit t haben wir eine räumlich periodische Funktion. Der Wert von $kx - \omega t$ nennt man Phase. Die beschriebene Welle ist eine, die nach rechts läuft. Eine Welle, die nach links läuft, wird durch $A \sin(kx + \omega t)$ beschrieben. Dies kann wie folgt gesehen werden: Ein fester Punkt auf der Welle, für die also die Höhe f konstant ist. Wir fragen uns dann jetzt, wie sich dieser Punkt bewegen muss, also mit der Welle mitlaufen muss. Damit f sich nicht ändert, muss die Phase, also das Argument $kx - \omega t$ konstant sein. Nehmen wir den Wert 0. Dann gilt also $kx - \omega t = 0$, also $kx = \omega t$ also $x = \frac{\omega}{k} \cdot t$. Nun haben wir:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f.$$

Somit gilt $x = \lambda f \cdot t$. Die Geschwindigkeit, mit der dieser Punkt nach rechts laufen muss, ist also λf . Eine gute Übung ist es, das Verhalten der Funktion $f(x, t) = \sin(x - t)$ zu betrachten; betrachte dazu mal mit Geogebra die Graphen von $f(x, 0.1) = \sin(x - 0.1)$, $f(x, 0.2) = \sin(x - 0.2)$ und überzeuge dich, dass dies Wellen, die mit Geschwindigkeit 1 nach Rechts gehen, darstellt.

Meistens meint man mit Wellen genau die Wellenphänomene, die sowohl eine räumliche, wie auch eine zeitliche Periodizität haben.

Die Beziehung $v = \lambda f$ ist sehr allgemein gültig, und auch mittels einfacher Züge vergleichbar: Falls wir Wellenlängen mit Wagonlängen vergleichen, dann bedeutet f die Anzahl der Wagons, die pro Sekunde an einem festen Punkt vorbeifahren. Wenn wir diese Anzahl der Wagons pro Sekunde f mit ihrer Länge λ multiplizieren, so bekommen wir die Geschwindigkeit des Zuges.

Da ihr den Sprachenzweig gewählt habt, und ich euch dieses Wissen nicht vorenthalten will, und sogar empfehlen möchte, diese kleine Gedächtnisübung des Auswendig-Lernens mal durch zu exerzieren, hier das griechische Alphabet, das ich auch weiter unten oft verwenden werde:

α , A	Alpha	ι , I	Iota	ρ , P	Rho
β , B	Beta	κ , K	Kappa	σ , ς , Σ	Sigma
γ , Γ	Gamma	λ , Λ	Lambda	τ , T	Tau
δ , Δ	Delta	μ , M	Mu	υ , Y	Upsilon
ϵ , ε , E	Epsilon	ν , N	Nu	ϕ , φ , Φ	Phi
ζ , Z	Zeta	ξ , Ξ	Xi	χ , X	Chi
η , H	Eta	\omicron , O	Omikron	ψ , Ψ	Psi
θ , ϑ , Θ	Theta	π , Π	Pi	ω , Ω	Omega

§2 Das Pendel

Das Pendel ist ein bekanntes Beispiel, anhand dessen man schon mehrere Aspekte von Wellen und periodischen Phänomenen betrachten kann. Sei ℓ die Länge des Seils und m die Masse des Objekts, das am Seil hängt. Wir wollen die Abhängigkeit des Winkels ϑ zwischen Vertikale durch den Aufhängepunkt und Seil als Funktion der Zeit betrachten. Wir werden hier ganz einfach das zweite Axiom von Newton anwenden: $F = ma$. Hier muss man aber Folgendes betrachten:

(1) Das Seil ändert seine Länge nicht, und somit sind alle Kräfte in Richtung des Seils insgesamt Null. Spannkraft vom Seil und Schwerkraft heben sich längs des Seils auf.

(2) Die Schwerkraft kann in eine Komponente $F_{||}$ in Richtung des Seils und eine Komponente F_{\perp} senkrecht (also tangential am Kreis mit Mittelpunkt Aufhängepunkt und Radius ℓ). Wir haben $F_{\perp} = -mg \sin \vartheta$. Das Minuszeichen rührt daher, dass F_{\perp} die Masse in die „andere“ Richtung zwingt, also Richtung der Gleichgewichtsposition. Nennen wir ϑ nach rechts positiv, dann ist F_{\perp} negativ, wenn ϑ positiv ist und umgekehrt.

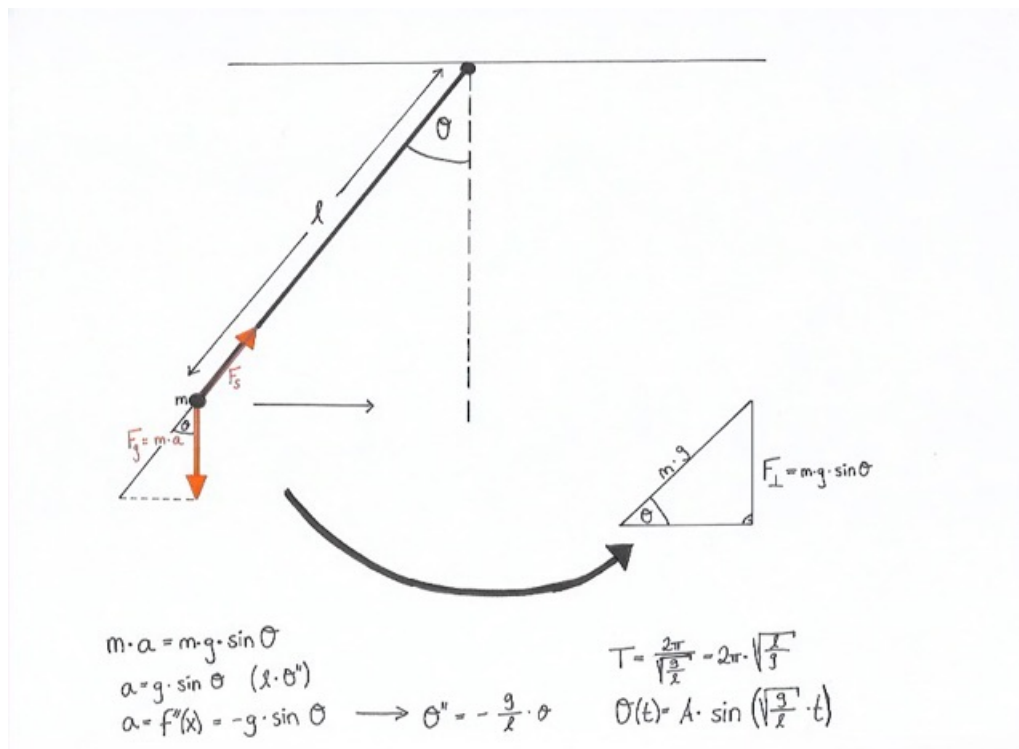


Abbildung 2: Das mathematische Pendel erklärt viel der mathematischen und physikalischen Hintergründe von Wellen.

(3) Die Bewegung der Masse ist eine Art Kreisbewegung: Die Distanz zwischen Aufhängepunkt und Masse bleibt ℓ . Der Kreisbogen zwischen der aktuellen Position der Masse und der Vertikale durch den Aufhängepunkt hat eine Länge $b = \ell \vartheta$, wobei ϑ natürlich in Bogenmaß ausgedrückt wird. Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$v = \frac{db}{dt} = \ell \frac{d\vartheta}{dt} = \ell \dot{\vartheta},$$

wobei ein Punkt über ein Symbol Differenzierung nach der Zeit bedeutet. Die Beschleunigung a ist somit $a = \ell \ddot{\vartheta}$. Wir bekommen also

$$m \ell \ddot{\vartheta} = -m g \sin \vartheta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell} \sin \vartheta.$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen nicht lösbar im Sinne, dass wir eine bekannte Funktion benutzen können, die Lösung zu beschreiben. Wir können also eine bekannte Technik anwenden: **Linearisierung**. Hierbei werden wir komplizierte Funktionen wie folgt annähern

$$\boxed{f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x.} \quad (5)$$

Diese Annäherung mittels einer linearen Funktion ist oft gültig, solange man sich auf kleine x beschränkt. Für unser Pendelproblem wird dies: $\sin \vartheta \approx 0 + 1 \cdot \vartheta = \vartheta$. Daher wird unsere Differentialgleichung

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell} \vartheta.$$

Diese ist aber lösbar und zwar $\vartheta(t) = A \sin(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t + \delta)$. Wir können durch geeignete Wahl der Zeit die Anfangsphase δ auch Null wählen, also

$$\vartheta(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right),$$

wobei A die maximale Auslenkung, also die Amplitude ist. Die Schwingungsdauer finden wir wie folgt

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\ell}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.} \quad (6)$$

Dies ist die Pendelformel. Man sieht aber, dass die Periode von der Amplitude unabhängig ist, und dass ein längeres Seil eine längere Periode bedeutet.

§3 Wellen in Materie

Moleküle und Atome üben Kräfte auf einander aus. Ist die kinetische Energie von Molekülen sehr groß, so werden diese Kräfte nicht ausreichen, die Atome/Moleküle in der Nähe von einander zu halten. Bei niedrigeren kinetischen Energien werden die Kräfte aber groß genug sein, um eine unmittelbare Nähe von den Molekülen zu einander zu bewirken. Die Materie befindet sich dann zum Beispiel in festem oder in flüssigem Zustand. In festem Zustand ist der Platz von einem Molekül / Atom sogar ziemlich fest, nur ein Schaukeln um einen festen Ort ist hier erlaubt.

Betrachten wir zuerst ein einfaches Modell: Nehmen wir an, wir leben jetzt nur in einer Dimension, sodass ein Festkörper etwas wie einer Reihe von Atomen entspricht. Nehmen wir des weiteren an, die Atome sind alle gleich. Weil die Atome hier eine Kette bilden, können wir sie nummerieren, einfach von links nach rechts. Das Label eines Atoms in der Kette bezeichnen wir dann mit n . Es sei x_n die Position von Atom n . Atom n hat zwei Nachbarn (außer bei $n = 0$, aber Randphänomenen werden wir zuerst mal vernachlässigen), Atom $n+1$ und Atom $n-1$. Um das Modell noch einfacher zu machen, werden wir annehmen, dass es nur sogenannte nearest-neighbor-interaction gibt: Jedes Atom übt nur Kräfte auf direkte Nachbarn aus. Die Kräfte wirken zwischen zwei Atomen und hängen in der Regel von der Distanz ab. Diese möchten wir jetzt etwas qualitativer beschreiben.

Es sei $f_{n,n-1}$ die Kraft, die Atom $n-1$ auf Atom n ausübt. Diese Kraft ist eine Funktion von der Distanz zwischen den beiden Atomen: $f_{n,n-1} = f(x_n - x_{n-1})$. Sind alle Atome in ihrer Gleichgewichtsposition, so ist diese Kraft Null. Also, wenn wir die Gitterdistanz zwischen den Atomen mit a andeuten, so gilt $x_n = na + \delta_n$ und wir werden annehmen, dass die Abweichung δ_n von der Gleichgewichtslage $x_n = an$ nur ganz wenig ist. Dann können wir f linearisieren:

$$f_{n,n-1} = f(an + \delta_n - a(n-1) - \delta_{n-1}) = f(a + \delta_n - \delta_{n-1}) \approx f(a) + f'(a) \cdot (\delta_n - \delta_{n-1}) = f'(a) \cdot (\delta_n - \delta_{n-1}),$$

wobei der letzte Schritt logisch ist, weil $f(a) = 0$ genau die Bedingung für die Gleichgewichtslage ist. Wir sehen hier aber folgendes: Es schaut so aus, als würde das n -te Atom mit den Nachbarn durch Federn verbunden sein. Die Federkonstante ist hier dann etwa $f'(a)$. Um die Analyse jetzt

nicht zu mühselig zu machen, machen wir gleich die Analogie mit der einfachen Feder, und nehmen an, dass, wenn es Bewegungen im Gitter gibt, diese Schwingungen eine Frequenz $f \sim \sqrt{k/m}$ haben sollten. Hierbei entspricht k etwa $f'(a)$, also, wie stark sich die Atome beeinflussen, und m ist die Masse jedes Atoms. Hier können wir einiges ablesen:

(1) Falls die Atome sich stark beeinflussen, also wenn die Kräfte zwischen den Atomen sehr stark sind, sind die Frequenzen höher, und mit etwas Vorstellungskraft sieht man dann auch, dass Schallwellen sich schneller fortpflanzen. Tatsächlich sind in Festkörpern wie Eisen die Geschwindigkeiten von Schall deutlich höher als in Gasen und Flüssigkeiten wie Wasser.

(2) Die Frequenz nimmt zu, wenn die Massen kleiner werden. Hier ein Beispiel mit Gasen: Heliumatome sind sehr leichte Moleküle, weil sie nur 2 Protonen und 2 Neutronen haben. (Die Elektronen spielen, wenn es um die Masse geht, so gut wie gar keine Rolle!) Ein Sauerstoffmolekül O_2 hat 16 Protonen, und 16 Neutronen. Ein Kohlenstoffdioxidmolekül CO_2 hat 22 Neutronen und 22 Protonen. Tatsächlich ist unsere Stimme beim Einatmen von Helium höher als bei normaler Luft, und wenn wir reines CO_2 einatmen, klingen wir wie Dark Father – was nicht ungefährlich ist, denn durch die höhere Dichte bleibt dieses Gas unten in der Lunge hängen und blockiert die Sauerstoffaufnahme (Ausweg: Personen umgekehrt mit Kopf nach unten und Füße nach oben bei gestrecktem Rücken festhalten).

§3.1 Schall

Schall kann man eigentlich am besten als periodische Druckschwankungen oder als periodische Dichteschwankungen sehen. Sei also $p(x, t)$ der Luftdruck an der Stelle x zur Zeit t , so ist bei Schall $p(x, t)$ als Welle, oder besser noch, als Schwingung zu sehen. Für eine Welle von der Form $p(x, t) = p_0 + A \cdot \sin(2\pi ft - kx)$ ist f die Frequenz, p_0 der Mittelwert, also der Standardwert des Luftdrucks (etwa $100.000 \text{ Pa} = 1000 \text{ mba}$) und A die Amplitude, k ist der Wellenvektor und bedingt die Wellenlänge. Die Druckschwankungen liegen also im Bereich $[p_0 - A; p_0 + A]$. Die Amplitude einer Dichteschwankung korrespondiert mit der Lautstärke, die Frequenz mit der Tonhöhe.

Schall hat einige wichtige Eigenschaften:

(a) Die Bewegungen der Luftmoleküle, oder besser betrachtet, die Bewegung von Luftpaketten, verlaufen in Richtung der Ausbreitungsrichtung des Schalls. Schall (in Luft) ist somit ein longitudinales Wellenphänomen. In Festkörpern können auch transversale Komponenten dazu kommen.

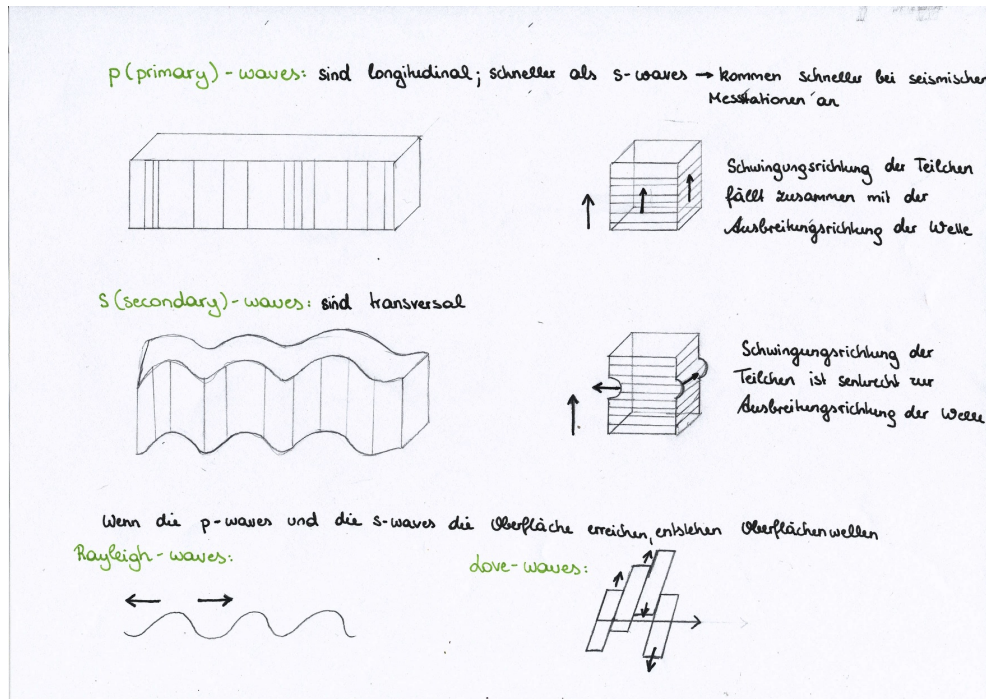
(b) Die Schallgeschwindigkeit beträgt etwa 1236 km/h , also etwa 343 m/s . In Wasser ist die Schallgeschwindigkeit höher, in Festkörpern wie Metall noch höher.

(c) Schall hat im Alltag die Möglichkeit „um die Ecke“ zu gehen. Dies hat damit zu tun, dass die Wellenlänge von (dem hörbaren) Schall zwischen etwa 2 cm und 20 m liegen. Viele Objekte im Alltag haben also vergleichbare Größen. Die Wellenlänge von Licht ist viel kleiner als die Objekte aus dem Alltag, somit ist jedes Objekt im Alltag mehrere hunderttausende Male größer als die Wellenlänge, und Licht wird dann nicht um die Ecke gelenkt. Etwas wie Schatten gibt es für Schall praktisch fast nicht, außer Objekte die auch mehrere hundert Meter groß sind. Eine zwei Meter hohe Wand (z.B. Lärmschutzwand) reicht nur aus, die höheren Frequenzen, also die kleineren Wellenlängen etwa $\lambda < 0,2 \text{ m}$ zu blockieren.

§3.2 Festkörperwellen – Erdbeben als Beispiel

In Festkörpern sind mehrere Schwingungen als in Gasen möglich. Scherung kann in einem Festkörper schon auftreten, in einem Gas nicht. Somit sind auch transversale Wellen in Festkörpern möglich.

Bei Erdbeben kommen beide Wellenarten vor. Es gibt P-Wellen und S-Wellen. P-Wellen sind **primary waves**, sie sind longitudinal. S-Wellen sind **secondary waves** (auch: shear waves; shear bedeutet Scherung). Der Name kommt daher, dass die P-Wellen schneller als S-Wellen sind, sodass die nach einem Erdbeben bei einer seismischen Messstation zuerst ankommen.



Durch den Zeitunterschied zwischen P-Wellen und S-Wellen kann man ausrechnen, wie weit einer Messstation entfernt das Erdbeben stattgefunden hat.

Weil Scherung in Flüssigkeiten auch nicht wirklich gut auftreten kann, können S-Wellen nicht durch den flüssigen Erdkern, P-Wellen aber schon. Dadurch gibt es bei Erdbeben auf der anderen Seite von der Erde einen Bereich, der als Schattenzone bekannt ist.

Obwohl wir Oberflächenwellen später etwas mehr studieren, hier kurz die Oberflächenwellen, die bei Erdbeben vorkommen, wenn die P-Wellen und S-Wellen an die Oberfläche ankommen und sich dann weiter an der Oberfläche fortbewegen:

Love-waves: (Bild!) hier ist Scherung sehr wichtig! Diese sind die schnellsten seismischen Oberflächenwellen.

Rayleigh-waves: (Bild!) – siehe <http://www.geo.mtu.edu/UPSeis/waves.html> Diese sind mit Oberflächenwellen im Wasser vergleichbar.

§3.3 Helioseismologie

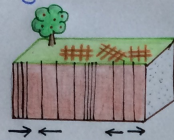
Die Sonne ist auch ständig in Bewegung. Es gibt hier auch verschiedene erdbebenartige Wellen. Diese sind etwas anspruchsvoller zu messen als Erdbebenwellen auf der Erde. Was man eigentlich macht, ist den Dopplereffekt benutzen. Falls die Oberfläche der Sonne bebt, also hin und her wackelt, so bewegt sich die leuchtende Fläche dann mal auf uns zu, dann mal von uns weg. Somit kann man mit dem Dopplereffekt für Licht (Spektrallinien sind hier zu beobachten), kleine Schwingungen der Sonnenoberfläche als periodische Rot- und Blauverschiebungen wahrnehmen. Die Technik ist schon so gut entwickelt, dass man sogar niedrige Geschwindigkeitsunterschiede wie

ERDBEBENWELLEN

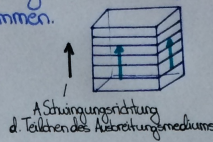
Erdbebenwellen sind Festkörperwellen. Sie sind aber mit Schallwellen vergleichbar, da sie sich „schallähnlich“ in Lava und Gestein ausbreiten.

Man unterscheidet zwei Arten von Erdbebenwellen:

•) Longitudinalwellen: **primary (p)-waves**



Schwingungsrichtung der Teilchen fällt mit der Ausbreitungsrichtung der Welle zusammen.

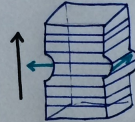


$k \dots$ Wellenvektor
 $k \parallel$ Auslenkung

•) Transversalwellen: **secondary (s)-waves**



Schwingungsrichtung der Teilchen ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.



$k \perp$ Auslenkung

•) **p-waves** sind schneller als **s-waves**.

Somit kommen Longitudinalwellen nach Erdbeben vor Transversalwellen bei seismischen Messstationen an. Durch den Zeitunterschied kann ausgerechnet werden, wie weit das Erdbeben weg war.



etwa $1m/s$ wahrnehmen kann.

Man unterscheidet in der Helioseismologie vor allem drei Wellenarten: g -Wellen, p -Wellen und f -Wellen. Man kann sie verstehen, indem man sich davon überzeugt, dass für jede Schwingung eine Kraft notwendig ist, die als stabilisierende Kraft auftritt, welche das System wieder in die Ausgangslage, also Gleichgewichtslage, zurückzwingt. Bei der Feder ist diese die Federkraft, beim Pendel ist es die Schwerkraft.

Bei g -Wellen steht das g für **gravity**. Die Schwerkraft spielt hier durch den **Auftrieb** die stabilisierende Kraft. In der Sonne gibt es einen Temperaturgradienten, die Temperatur nimmt nach außen hin ab. Durch die Schwerkraft gibt es auch einen Druckgradienten; der Druck nimmt nach außen hin ab. In der Sonne bewegt sich das ganze Plasma auch durch einander. So kann es mal passieren, dass eine Menge M Plasma sich etwas auswärts bewegt. Davon abhängig wie groß der Druckgradient ist, wird sich das Volumen M mehr oder weniger ausdehnen, sodass die Temperatur von M nach einiger Distanz entweder (i) kleiner ist als die des Plasmas, das jetzt M umgibt, oder (ii) größer ist als die des Plasmas, das jetzt M umgibt. Also, entweder hat sich M mehr als der Temperaturgradient oder weniger als der Temperaturgradient abgekühlt. Im ersten Fall ist M kühler als seine Umgebung, und darum sinkt M wieder ab. Im zweiten Fall ist M als wärmer als seine Umgebung und M steigt weiter auf. Im ersten Fall ist der Auftrieb eine stabilisierende

Kraft und Schwingungen können entstehen, diese sind die g -Wellen, im zweiten Fall wird M weiter und weiter aufsteigen, und diese Situation korrespondiert mit chaotischer Strömung (Konvektion, instabile Strömungen).

Hier sind also zwei Begriffe wichtig:

(a) Der Adiabatische Temperaturgradient ist der Temperaturgradient, bei dem die Temperatur einer aufsteigenden Menge M so abnimmt, dass die Temperatur von M genau immer der Temperatur von der Umgebung entspricht. Ist der wirkliche Temperaturverlauf weniger steil als adiabatisch, so ist die Umgebung einer aufsteigenden Menge M wärmer als M , und somit sind wir im ersten Fall, und g -Wellen können entstehen. In der Erdatmosphäre korrespondiert diese Situation mit einer stabilen Wetterlage – keine vertikale Durchmischung. Ist der wirkliche Temperaturverlauf steiler als adiabatisch, so sind wir im zweiten Fall und keine g -Wellen können entstehen, und die Situation ist eher chaotisch. Dies korrespondiert in der Erdatmosphäre mit einer unstablen Wetterlage, wie zum Beispiel vor einem Gewitter.

(b) Auftrieb ist mit dem **Satz des Archimedes** gut zu beschreiben: Ein Volumen V , das in einer Flüssigkeit oder Gas eingetaucht ist, empfindet einen Auftrieb, der dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit / des verdrängten Gases gleich ist. Ist also die Dichte von dem Volumen V kleiner als die der Umgebung, so ist der Auftrieb größer als die Schwerkraft auf V , und ein Aufsteigen ist möglich. Ist die Dichte von dem Volumen größer als die der Umgebung, so ist der Auftrieb kleiner als die Schwerkraft auf V und das Volumen wird absinken. Bei Gasen und Plasmen erklärt dies, warum ein Volumenelement V , das wärmer als die Umgebung ist, aufsteigt.

Die p -Wellen sind Wellen, bei denen der **Druck** die stabilisierende Kraft ist. Somit sind sie Druckwellen, und daher mit Schall vergleichbar.

Die f -Wellen haben auch die Schwerkraft als stabilisierende Kraft, aber hier sind die Wellen an der Oberfläche. Diese Wellen sind mit großen Wasserwellen vergleichbar, bei welchen die Schwerkraft über die Oberflächenspannung dominiert. Bei großen Wellen wird die Oberfläche nicht sehr stark gekrümmt, sodass die Oberflächenspannung nicht eine große Welle spielt, aber die Wassermassen an der Oberfläche werden doch erhebliche Distanzen nach oben bewegt. Hier unten werden diese mit Schwerewellen angedeutet.

Weil diese drei Typen von Wellen in unterschiedlichen Frequenzbereich dominieren, kann man sie mittels Messungen doch einigermaßen auseinander halten.

§3.4 Oberflächenwellen und Schwerewellen

Zuerst wäre mal der Begriff Oberflächenspannung zu definieren. Betrachten wir ein bestimmtes Volumen Wasser, so werden die Moleküle am Rand eher in die Mitte gezogen, aber die Moleküle in der Mitte werden von allen Seiten in gleichem Maß von den anderen angezogen. Somit kostet es Energie ein Molekül an den Rand zu befördern. Will man also die Fläche des Volumen vergrößern, so kostet das Energie.

Wollen wir die Fläche A um ΔA zu vergrößern, so müssen wir eine Energie ΔE aufwenden – dies korrespondiert also mit einer Erhöhung der inneren potentiellen Energie, darum die Notation ΔE . In der Regel wird ΔE von A , Volumen V und von ΔA abhängen. Im einfachsten Fall, wenn ΔA nicht zu groß ist, wird aber ΔE direkt proportional zu ΔA sein – hier ist wieder ein Fall einer Linearisierung. Der Proportionalitätsfaktor ist die Oberflächenspannung σ :

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta A}. \quad (7)$$

Die Einheit ist $J/m^2 = Nm/m^2 = N/m$. Diese Einheit hat auch die Federkonstante k bei Hooke's Law. In dem Sinne könnte man σ tatsächlich als Spannung betrachten.

Bei kleineren Wasserwellen (kleine Wellenlänge, kleine Amplitude) krümmt sich die Oberfläche relativ stark, sodass eine Welle eine lokale Flächenvergrößerung impliziert. Diese Wasserwellen, die zum Beispiel entstehen, wenn du ein kleines Steinchen ins Wasser fallen lässt, oder wenn etwas Wind über das Wasser weht, haben die Oberflächenspannung als stabilisierende Kraft. Diese Wellen sind aber langsamer als Schwerewellen, die große Wellenlänge und relativ große Amplituden haben.

Eine Schwerewelle krümmt die Oberfläche nicht sehr stark, aber durch Amplitude und Wellenlänge werden doch erhebliche Wassermassen hinauf und hinunter bewegt. Die Schwerkraft ist bei ihnen die stabilisierende Kraft. So kann man also die Oberflächenwellen zuerst einmal in zwei Gruppen einteilen: entweder Schwerkraft oder Oberflächenspannung ist dominant.

Ein Beispiel besonderer Schwerewellen sind die Tsunamiwellen. Ihre Wellenlänge ist mehrere Kilometer groß und die Amplitude mitten auf See vielleicht in der Größenordnung von einem Meter bis zu wenigen Metern, in der Nähe der Küste stauen sie sich auf, und die Höhe kann deutlich mehrere Stochwerke erreichen. Tsunamiwellen sind auch sehr schnell; bis zu etwa 800 km/h !

§4 Energie und Energietransport

§4.1 Dezibel

Lautstärke ist etwas schwierig zu definieren. Mit Schall wird Energietransportiert; durch eine bestimmte Fläche wird in einer bestimmten Zeit eine Energiemenge transportiert. Umso größer die Fläche ist, desto mehr Energie. Auch umso länger man misst, desto mehr Energie wird man messen. Um auf sinnvolle und vergleichbare Zahlen zu kommen, ist es daher sinnvoll, die Energiemenge, die pro Sekunde durch ein Quadratmeter transportiert werden, zu betrachten. Wir definieren damit die Schallintensität L als die transportierte Menge Energie pro Sekunde pro Quadratmeter. Die Einheit von L ist $J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$, oder auch wohl W/m^2 .

Weil die Moleküle immer schon eine **thermische Bewegung** ausführen, ist immer ein Hintergrundgeräusch da. Durch eine gegebene Fläche wird immer etwas Energie hin und her transportiert. Somit ist auch in voller Abwesenheit von Lärmquellen ein bestimmtes Niveau L_0 vorhanden. Es gilt $L_0 \approx 10^{-12} W/m^2$.

Die Dezibelskala für den Lärmpegel ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben: $10 \cdot \log(\frac{L}{L_0})$. Man vergleicht somit Schall mit dem Hintergrundrauschen. Der Zehnerlogarithmus wird benutzt, weil sonst die Zahlen über ein zu unhantierbares Intervall laufen würden.

Beispiel: Wenn Lärmpegel 60 dB ist, dann $60 = 10 \cdot \log(\frac{L}{L_0})$ also $6 = \log(\frac{L}{L_0})$, also $L = L_0 \cdot 10^6$. Wenn Lärmpegel 50 dB ist, dann $L = L_0 \cdot 10^5$. So sieht man leicht ein, für jeden Zehnerschritt in der Dezibelskala nimmt die Schallintensität mit einem Faktor 10 zu. Der Lärmpegel 120 dB ist somit von der Leistung her eine Million mal stärker als 60 dB.

Im Weltall gibt es keine Moleküle, also ist gar kein Schall dort. Somit $L = 0$. Aber dann ist der Lärmpegel $10 \cdot \log(0) = -\infty$. Leiser als 0 dB geht also doch.

§4.2 Das Pendel mit Energie

Siehe auch Handout, das in der Klasse aufgehängt wurde.

Kurzer Umriß:

Höhenenergie $E_{pot} = mgh = mgl(1 - \cos(\theta)) \approx \frac{1}{2}mgh\theta^2$, weil $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$ für kleine Winkel θ .

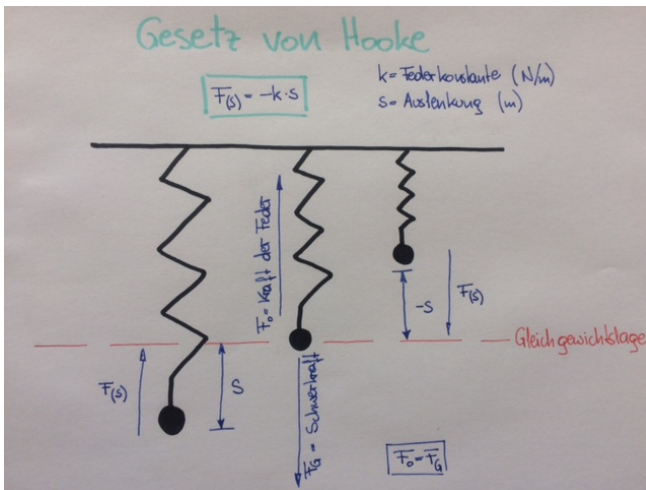


Abbildung 3: Das Gesetz von Hooke; Ausdehnung der Feder und durch die Feder ausgeübte Kraft werden mittels einer direkten Proportionalität beschreiben.

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$, weil $v = l\dot{\theta}$.

Die Summe dieser Energien ist im reibungslosen Fall konstant, also finden wir $l\dot{\theta}^2 + g\theta^2 = C$ für irgendeine positive konstante C . Eine Lösung dazu ist $\theta = \theta_0 \cdot \cos(\omega t)$, wobei $\omega^2 = g/l$. Was θ_0 sein muss, darfst du bestimmen! Aus $\omega^2 = g/l$ finden wir für die Periode $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, die altbekannte Pendelformel.

§4.3 Hooke's Law und Energie

Bringt man eine Feder um eine Distanz s aus seiner Gleichgewichtslage, so erfordert dies eine Kraft $F(s)$. Diese Kraft hängt von der Auslenkung s ab. Im Allgemeinen wird $F(s)$ eine sehr komplizierte aber monoton steigende Funktion von s sein. Wir können die Analyse vereinfachen, indem wir uns auf kleine Auslenkungen beschränken. Wir wollen also mal wieder die Technik der Linearisierung anwenden: $F(s) = ks$. Achtung: die Feder übt eine Kraft in die andere Richtung aus, also $-ks$.

Die Formel $F(s) = -ks$, wobei F die Kraft ist, die die Feder ausübt, ist als das **Gesetz von Hooke** bekannt; siehe Abbildung 3.

Die Konstante k heißt **Federkonstante**, hat Einheit N/m und gibt an, wie viel Kraft pro Längeneinheit nötig ist, die Feder auszulenken. Umso steifer die Feder, desto größer k . k ist also ein Proportionalitätsfaktor $F(s) : s = k$. Dass k wirklich von s unabhängig ist, gilt nur für kleine Auslenkung.

Wenn wir die Feder um eine Distanz x aus ihrer Gleichgewichtsposition bringen wollen, so ist eine Arbeit

$$W(x) = \int_0^x F(s)ds = \int_0^x ksds = \left[\frac{1}{2}ks^2\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 \quad (8)$$

notwendig.

ALLGEMEIN kann man sagen, dass die Energie eines schwingenden System nach Linearisierung immer von der Form $E = \frac{1}{2}Cx^2$, wobei C eine Konstante ist, die das System charakterisiert.

Wenn die Feder mit einer Masse m am Ende hin und her schwingt, so ist die kinetische Energie der Masse $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

ACHTUNG: Ein Punkt (Dot) über ein Symbol bedeutet die Zeitableitung. Somit ist \dot{x} nichts anders als die Geschwindigkeit.

Die Gesamtenergie des Schwingsystems Masse-Feder ist somit

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (9)$$

Wir wollen nun unter der Annahme der Reibungslosigkeit untersuchen, welche Bewegungen die Masse an der Feder ausführen wird. Wenn keine Reibung vorherrscht, so ist E konstant. Somit muss zwischen x und seiner Zeitableitung \dot{x} eine Beziehung gelten, die x fast ganz bestimmt: Denn aus

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kst.$$

folgt

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = kst.$$

Da wir schon wissen, dass eine periodische Bewegung ausgeführt wird, können wir als Ansatz nehmen $x = A \cdot \cos(\omega t)$, und versuchen dann A und ω zu bestimmen. Wenn $x = A \cos(\omega t)$, dann $\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t)$, und somit haben wir

$$mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + kA^2 \cos^2(\omega t) = kst.$$

Dies kann nur gelten, wenn die beiden Koeffizienten $mA^2\omega^2$ und kA^2 gleich sind, denn dann steht dort ein Vielfaches von $\sin^2 + \cos^2$, und keine andere Kombination von $\sin^2 + \cos^2$ ist konstant. Also

$$mA^2\omega^2 = kA^2 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Und somit gilt für die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Wir sehen, dass die Konstante A nicht bestimmt ist. A ist die maximale Auslenkung. Die kann ich mit der Hand selbst festlegen, indem ich der Masse eine Anfangsauslenkung gebe. Die Frequenz bestimmte ich aber nicht; die hängt von der Feder und von der Masse ab.

ACHTUNG: Für die, die die Mathe etwas besser verstehen wollen: Ich hätte auch den Ansatz $x = A \sin(\omega t)$, oder $x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ oder sogar $x = A \cos(\omega t + \delta)$ nehmen können. Dies ist eine gute Übung. Keine Sorge aber, denn die Ergebnisse bleiben gleich – beim zweiten Ansatz braucht man dann noch $A = \pm B$. Diese Vielzahl an Möglichkeiten rührt daher, dass man zwei Anfangsbedingungen braucht: Anfangsauslenkung und Anfang der Zeitmessung. Gibt man $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ vor, so gibt es nur eine Lösung.

WICHTIG: Die Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ kann man auch für Schall anwenden, aber dann nur qualitativ. Moleküle ziehen einander ja auch etwas an, lassen sich aber auch nicht beliebig zusammendrücken. Sie verhalten sich in Gruppen also etwa wie eine Menge an Massen, die durch Federn verbunden sind. Nimmt die Masse zu, so nimmt auch T zu, nimmt b ab, so auch T . Dies sehen wir bei Helium: wenn wir Helium einatmen, dann wird unsere Stimme höher, also f höher, somit T kleiner. Das kann man darauf zurückführen, dass Heliumatome nur vier Teilchen im Kern haben, und somit sehr leichte Moleküle sind. Sauerstoff und Stickstoff haben im Schnitt etwa 16 bzw. 14 Teilchen im Kern, die Moleküle O_2 und N_2 haben also eine achtmal bzw. siebenmal so große Masse als Heliumatome (welche auch gleich die Moleküle sind). Ein CO_2 -Molekül hat insgesamt $12 + 32 = 44$ Nukleonen. Und tatsächlich bekommt man eine sehr niedrige Stimme, wenn man etwas pures CO_2 einatmet. Dies ist aber recht gefährlich, denn es kann sich unten in den Lungen ablagern – falls so ein Experiment nicht gut läuft, muss man die Person vertikal mit dem Kopf nach unten aufstellen, damit das schwerere CO_2 aus den Lungen abläuft.

Falls wir aber k modifizieren, so ergibt sich auch etwas interessantes: Wasser ist viel schlechter zusammendrückbar als Luft, und somit verhält Wasser sich wie ein System gekoppelter Federn mit großem k . Dann nimmt T ab, die Frequenz somit zu. Was wir vor allem in der Praxis sehen, ist das Schall in Luft langsamer als in Wasser ist. Die Größe k sagt also auch etwas über die Geschwindigkeit der Wellen! In Metall oder in Wasser breitet sich Schall viel schneller aus als in der Luft.

Versuchen wir noch zum Schluss einen Ausdruck für die totale Energie zu finden. Nehmen wir $x = A \cos(\omega t)$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t).$$

und benutzen, dass $k = m\omega^2$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Diese Formel gilt sehr allgemein: E ist **direkt proportional zum Quadrat der Frequenz und direkt proportional zum Quadrat der maximalen Auslenkung**. **Achtung: Die Formel von Planck $E = hf$ ist also wirklich ganz anders! Photonen sind ja auch nicht ganz normal schwingende Massen . . .**

§4.4 Phononen als Energiequanten

Oben wurde schon erwähnt, dass wir Schall als Schwingungen mit Federn betrachten können. Wir wissen, dass Licht auch ein schwingendes System ist. Bei Licht schwingen das elektrische Feld E und das magnetische Feld hin und her. Es gilt auch hier, dass die Energiedichte (Energie pro Volumen) direkt proportional zum Quadrat der maximalen Auslenkung ist. Die Lichtintensität wächst mit dem Quadrat des elektrischen Feldes – das E und B direkt proportional sind, gilt das noch immer, wenn wir auch B betrachten.

Also, klassisch sind Schall und Licht sich als Schwingungssystem irgendwie ähnlich, und doch auch nicht:

- (1) Licht gibt in Vakuum die maximale Geschwindigkeit des Universums an. Schall nicht.
- (2) Licht kennt nur transversale Wellen; die Polarisation von Licht wird durch zwei Richtungen beschrieben, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen. Schall ist ein longitudinales Wellenphänomen; es gibt nur eine Polarisation, die Ausbreitungsrichtung. Somit kann man für Licht ganz interessante Phänomene wie zirkuläre Polarisation wahrnehmen, bei Schall nicht.

Aber, und das ist wesentlich, die Gleichungen, die Schall und Licht beschreiben, haben eine bestimmte Ähnlichkeit; ja, beide sind Schwingungssysteme. Somit sind mehrere mathematische Merkmale gleich. Diese überleben, wenn wir die Quantenmechanik benutzen, und jetzt kommt etwas ganz interessantes:

Wo Licht aus Photonen besteht, die die kleinsten Wellen als Quanten beschreiben, also als Teilchen, so sind Schallwellen auch als Quantenteilchen zu beschreiben. Diese nennt man **Phononen**. Man kann also eine Schallwelle als Strom von vielen Phononen betrachten. Diese Phononen sind wie kleine Teilchen, die sich durch das Medium fortpflanzen, und auch absorbiert, emittiert und reflektiert werden können. Ein Phonon ist etwas wie eine quantisierte Schwingung . . . Wenn ein Phonon auf ein Elektron trifft, kann er es aus dem Atom kicken. Dies ist klassisch gesehen das Folgende: geht eine Schallwelle durch ein Medium, so schwingen die Atome hin und her, und schwingt ein Atom mal heftig und prallt auf einen Nachbar mit so einer Wucht, so wird ein Elektron aus dem Atom gekickt, und so entsteht in einem Metall ein freies Elektron.

Mit den Phononen hat man eine interessante Sichtweise dazu bekommen; man kann vieles durch Teilchen beschreiben, ob diese Dinge, die sie beschreiben, jetzt Teilchen sind oder nicht. Weil

diese Phononen nicht nur mit den Atomen interagieren, sondern auch mit sich selbst, kann man ein Festkörper als Gas aus Atomen und Phononen betrachten. Die Atome schwingen bei jeder Temperatur $T > 0(K)$, und somit gibt es immer Phononen, aber mit steigender Temperatur mehr und mehr. Durch die Interaktion mit einander und mit den Atomen kann man dann auch erklären, warum es immer in paar Ionen, freie Elektronen aus kovalenten Bindungen im Metall gibt, in einem Halbleiter sind somit immer Löcher und Leitungselektronen vorhanden. In der Luft sind also immer mehrere Atome ionisiert ...

Phononen sind also wie Photonen, aber dann was anders; das wichtigste ist, dass sie wesentlich zu einem Verständnis der Natur beitragen können. Sie sind Pseudo-Teilchen, sie sind ja nicht wirklich Teilchen, aber was macht das denn aus?

§5 Interferenz und Überlagerung

Zuerst sammle ich hier einige Definitionen, die in der Stunde von Freitag 24.02 vorgekommen sind.

Phase: alle Punkte auf einer Sinuswelle, die eine ganze Anzahl an Perioden von $x = 0$ liegen, haben Phase 0. Die Periode wird in Grad aufgeteilt, und so korrespondiert zu jedem Punkt auf einer Welle eine Phase, das ist dann der Winkel innerhalb einer Periode.

Wellenfront: das ist eine zusammenhängende Fläche von Punkten, die alle Phase Null haben. In Prinzip wird auch folgende Definition genommen: Eine zusammenhängende Fläche mit gleicher Phase; die Wahl der Phase ist eigentlich willkürlich.

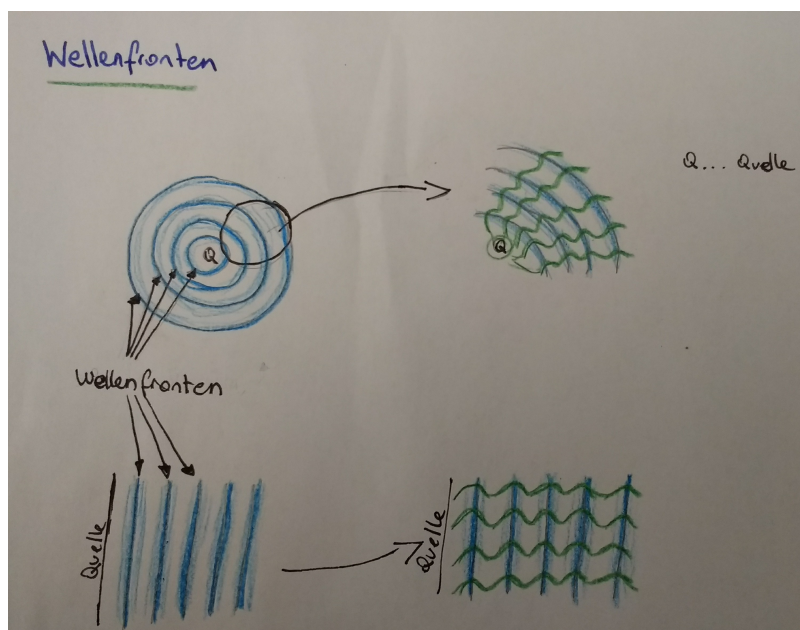


Abbildung 4: Wellenfronten in den Situationen, wo die Lichtquelle punktförmig ist, und wo die Wellen sich wie 2-dimensionale Ebenen fortpflanzen.

Kaustik: Brennlinie: Wenn die Wellenfronten zusammenkommen, hat der Punkt / haben die Punkte, wo die Wellenfronten auf einander treffen, keine eindeutige Phase mehr, weil dort alle Phasen von 0 bis 360 Grad vertreten sind. Der Brennpunkt bei einer konvexen Linse ist also eine Kaustik. Der Regenbogen ist auch ein Beispiel eines Phänomens, wo die Kaustiken den Effekt erzeugen. Achtung: In der Literatur ist eine andere Definition von Kaustiken eher üblich – die andere Definition braucht aber mehr Vorwissen und somit mehr Vorbereitung; für uns wird diese Definition reichen.

Schallmauer: Dieses Beispiel ist strikt genommen keine Kaustik, hat aber schon einige Ähnlichkeiten

damit. Die Wellenfronten breiten sich langsamer aus als die Quelle, und somit bildet sich eine sogenannte Mach-Kegel. An der Spitze ist die Quelle und hier ist die Phase nicht definiert. Der Mach-Kegel ist eine Wellenfront ohne eindeutige Phase, und wird als Knall wahrgenommen. Dies hat damit zutun dass die Quelle die Luft sehr stark zusammenpresst. Man sieht ähnliche Phänomene bei Wasserwellen, wenn ein Schiff schnell genug fährt und Bugwellen erzeugt.

Kohärenz: Zwei Lichtquellen sind kohärent, wenn ihre Phasendifferenz konstant ist. Kohärentes Licht hat folgende Eigenschaft: zwei Punkte im Lichtstrahl haben konstante Phasendifferenz, und diese wird bestimmt durch die Anzahl der Wellenlängen, die zwischen beiden Punkten liegen. Diese Definition hat nur Sinn für monochromatisches Licht.

Gangunterschied: Der Wegunterschied zwischen zwei Lichtwegen, aber dann in Phasen ausgedrückt, oder in Wellenlängen.

Monochromatisches Licht ist Licht mit fester Wellenlänge.

Interferenzformel bei zwei monochromatischen Lichtquellen auf Distanz d : Maximen treten auf in der Richtung bestimmt durch $d \sin(\theta) = k\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Gangunterschied (Wegunterschied) ist hier $d \sin(\theta)$.

Intermezzo – die Natur des Lichts

Kurz eine Erinnerung zum Thema Licht.

Licht ist ein Teil des elektromagnetischen Spektrums. Somit ist es ein Phänomen, bei dem es sich um Schwingungen im elektromagnetischen Feld handelt. Das **elektrische Feld** in einem Punkt ist definiert als die Kraft, die die elektrische Kraft auf ein sich in Ruhe befindendes Teilchen mit Ladung $1C$ ausübt. Somit ist das elektrische Feld etwas wie die elektrische Kraft pro Ladung:

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}. \quad (10)$$

Die magnetische Kraft hat eine Geschwindigkeitsabhängigkeit. Wird eine Ladung schneller, so wirkt die magnetische Kraft auch stärker. Das magnetische Feld ist dann in abwesenheit anderer Kräfte durch folgende Gleichung definiert:

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (11)$$

Operationell betrachtet: Hier muss man also in jedem Punkt mehrere Testladungen mit mehreren Geschwindigkeiten austesten. Interessant ist Folgendes: Die magnetische Kraft steht normal auf dem magnetischen Feld und auch normal auf der Geschwindigkeit. Darum lenkt das B -Feld die Ladungen in Kreisbewegungen. Ist die Geschwindigkeit parallel zum B -Feld, so ist die magnetische Kraft Null, und so kann man die Richtung des B -Feldes bestimmen.

Beide Kräfte wirken oft zusammen: $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, welche als **Lorentzkraft** bekannt steht.

Monochromatisches und kohärentes Licht ist eine Welle im E - und B -Feld; siehe Abbildung 5. Normales Licht besteht aus vielen solchen Wellen zusammen.

Das elektrische Feld steht normal auf dem magnetischen Feld, und beide stehen normal auf der Fortpflanzungsrichtung. **Der Energietransport (= wie viel Energie pro Sekunde pro m^2 transportiert wird, Einheit W/m^2), wird auch wohl Flussdichte genannt, und ist direkt proportional zum Vektor $\vec{E} \times \vec{B}$ und weist in der Richtung von der Fortpflanzungsrichtung.** Der Fachbegriff ist hier der Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, wobei μ_0 die sogenannte Permeabilität des Vakuums ist, eine wichtige Naturkonstante.

In der Quantenmechanik wird es notwendig sein, das Licht zu quantisieren; also bestimmte kleinste Einheit einzuführen, sodass Licht nur in diesen Paketchen absorbiert und emittiert werden kann. Diese Paketchen heißen dann **Photonen** und waren schon öfter Gegenstand des Unterrichts. Zur Erinnerung $E = hf$.

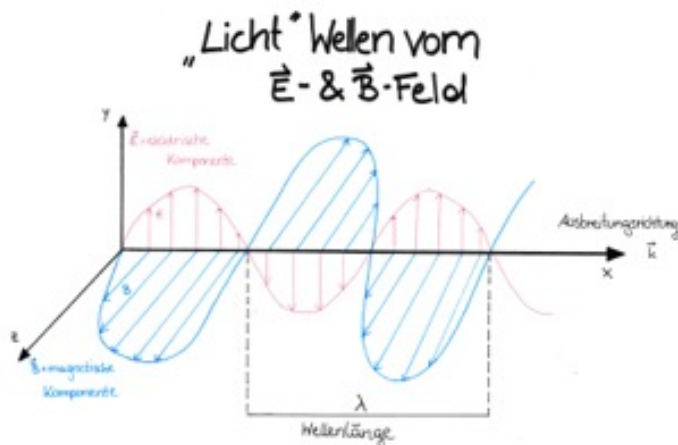


Abbildung 5: Die Natur des Lichts; monochromatisches kohärentes Licht ist eine gemeinsame Schwingung vom elektrischen und magnetischen Feld.

§5.1 Wellen-Addition und Fourier

Um Phänomene zu beschreiben, bei denen mehrere Quellen eine Rolle spielen, muss man wissen, wie man Wellen addiert. Seien nun L_1 und L_2 zwei Punkte, in denen monochromatische Lichtquellen stehen. Sei P ein dritter Punkt. Es kommen also zwei Lichtwellen auf P zu. Sind diese Lichtwellen in P in Phase, so kommt also ein Maximum von L_1 gleichzeitig mit einem Maximum von L_2 an. So auch für ein Minimum. In diesem Falle addieren sich die Intensitäten wie $A \sin(\omega t) + B \sin(\omega t) = (A + B) \sin(\omega t)$, mit A und B positiv. Falls diese Lichtwellen in Anti-phase ankommen, so haben wir die Addition $A \sin(\omega t) + B \sin(\omega t + \pi) = (A - B) \sin(\omega t)$, also eine Verringerung der Intensität.

Sind die in P ankommenden Lichtwellen in Phase, so verstärken sie sich, und man spricht von konstruktiver Interferenz.

Haben die in P ankommenden Lichtwellen einen Phasenunterschied von 180 Grad, so ist die Intensität deutlich verringert, und man spricht von destruktiver Interferenz.

Wodurch wird diese Phasendifferenz bestimmt? Gehen wir zuerst mal davon aus, dass L_1 und L_2 in Phase sind. Dies kann man erreichen, wenn man das Licht von einer Quelle aufsplittet. Zum Beispiel lässt man das Licht durch eine Wand mit zwei Löchern gehen, oder man benutzt einen halbdurchlässigen Spiegel. In diesem Fall ist die Phasendifferenz zwischen L_1 und P mit der Phasendifferenz zwischen L_2 und P zu vergleichen.

Phasendifferenz zwischen L_1 und P : $\frac{|L_1 P|}{\lambda} \cdot 360$. Phasendifferenz zwischen L_2 und P : $\frac{|L_2 P|}{\lambda} \cdot 360$. Somit erreichen wir folgende Konklusion:

Ist der Wegunterschied (Gangunterschied) $|L_1 P| - |L_2 P|$ ein Vielfaches von λ , so herrscht in P konstruktiver Interferenz.

Ist der Wegunterschied (Gangunterschied) $|L_1 P| - |L_2 P|$ ein ungerades Vielfaches von $\lambda/2$, so herrscht in P destruktiver Interferenz. Mit ungeradem Vielfachem von $\lambda/2$ ist gemeint: $\pm \frac{\lambda}{2}, \pm \frac{3\lambda}{2}, \pm \frac{5\lambda}{2}, \dots$. In diesem Falle ist der Phasenunterschied immer 180 Grad.

Im Unterricht wird das Beispiel einer Doppelspalt besprochen: $d \sin(\theta) = k\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$ gibt die Maximen der Intensität. Siehe auch die Abbildungen 6 und 7.

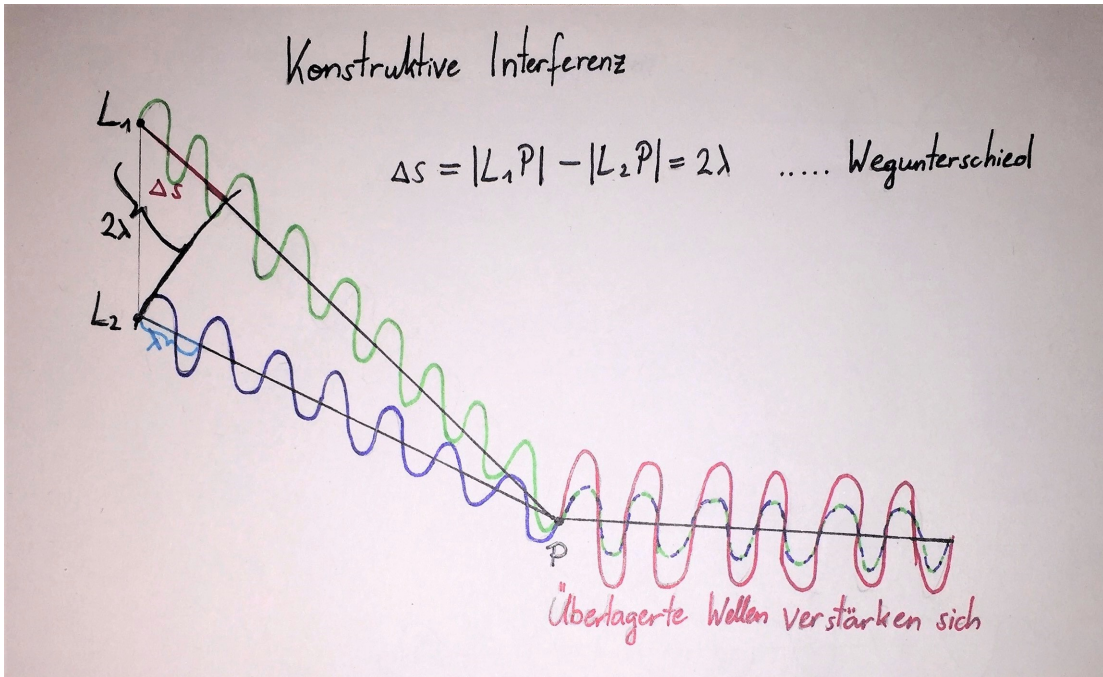


Abbildung 6: Konstruktive Interferenz bei zwei kohärenten Lichtquellen.

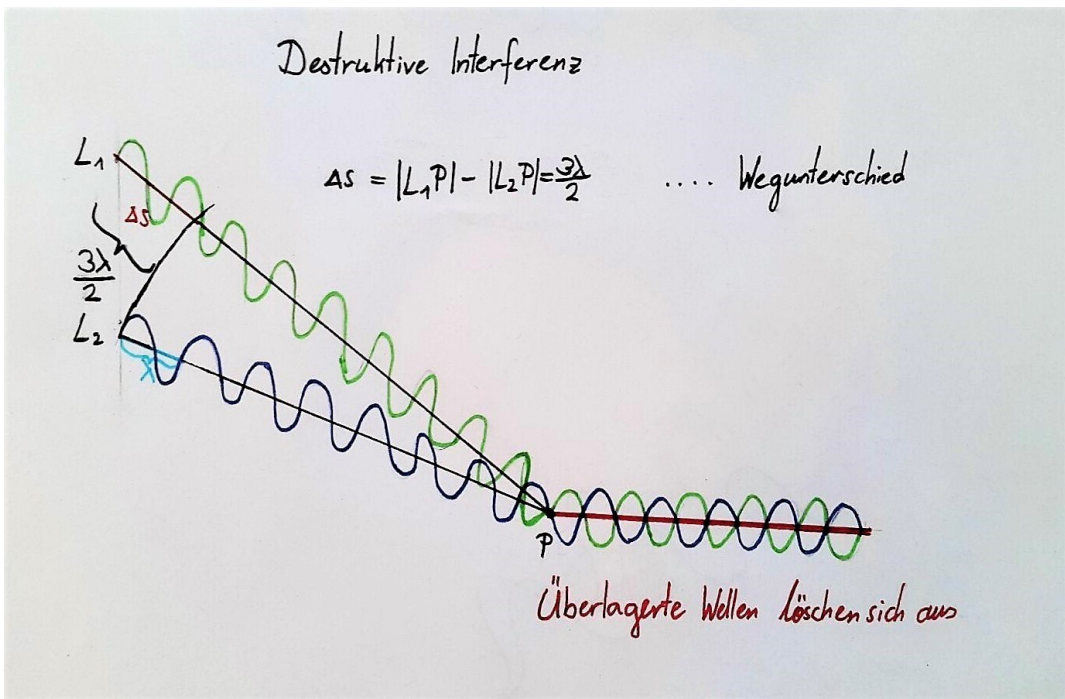


Abbildung 7: Destruktive Interferenz bei zwei kohärenten Lichtquellen.

Das Addieren von Wellen hat eine große Wichtigkeit: Jedes periodische Signal, m.a.W. jede periodische Funktion, kann also Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen beschrieben werden. Die Kunst des Zerlegens in Summen von Sinus und Cosinus heißt Fourieranalyse. Sie spielt in der Technik eine wesentliche Rolle. Aber auch in der Grundlagenforschung: das Licht von Sternen wird in ein Fourierspektrum zerlegt und dann analysiert. Damit kann man mehreres machen ...

Sehr oft sind Signale nicht periodisch. Was man dann macht, ist nur ein Intervall betrachten, und dieses dann periodisch fortsetzen. So macht man mit der Hand das Signal periodisch.

Bleiben wir beim Beispiel von Licht. Das Licht der Sonne ist keine monochromatische Welle, sondern eine Überlagerung von vielen Wellen. Wenn man das Licht der Sonne durch ein Prisma leitet, so wird das Licht nach Wellenlänge aufgespalten, somit hat man das Licht der Sonne als Summe von unterschiedlichen Sinuswellen geschrieben: Symbolisch:

$$I(t) \longrightarrow \sum_{\omega} A_{\omega} \sin(\omega t) \longrightarrow \int I(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

Für ω korrespondierend mit Gelb etwa ist A_{ω} (oder $I(\omega)$) maximal. Dies ist genau durch das Verschiebungsgesetz von Wien bestimmt. Siehe Schwarzkörperstrahlung.

Nun kann man sich fragen, warum wir bei der Sonne keine Interferenz wahrnehmen, denn wir haben also eine Summe von Wellen, wieso dann keine Interferenz? Die Antwort ist so einfach, und gleichzeitig, so kompliziert wie nur möglich: Das Licht der Sonne ist nicht kohärent: Die Wellen sind so chaotisch durcheinander, dass statt scharf definierte Maximen und Minimen und der dazwischenliegenden Bereichen mit mittlerer Intensität alles durcheinander läuft und so eine Mittelintensität entsteht. Man kann also auch aus diesem Beispiel lernen, dass um Interferenz bei Licht wahrzunehmen, kohärente Lichtquellen notwendig sind, also zum Beispiel Laser.

Bei Schall ist Fourieranalyse auch extremst wichtig. Wenn du singst, ist dein Signal nicht eine schöne Abfolge von unterschiedlichen Sinuswellen. Zu jeder Zeit ist dein Signal eine Überlagerung von verschiedenen Frequenzen.

Betrachten wir die Saite einer Gitarre. Wenn wir die Saite in Schwingung versetzen entsteht eine sogenannte stehende Welle, die selbst eine Überlagerung ist. Die niedrigste Frequenz wird durch die Saitenlänge L bestimmt $\lambda_0 = 2L$. Dann gibt es noch die Obertöne $\lambda_1 = L$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}L$, $\lambda_3 = \frac{2}{4}L = L/2$ und so weiter. All diese Frequenzen (Wellenlängen) haben unterschiedliche Intensitäten I_{λ} . Der Klang des Musikinstruments wird durch die Funktion $\lambda \mapsto I_{\lambda}$ bestimmt.

Dieselbe Frage wie vorher wird auch wie vorher beantwortet: Warum hat man in einer Musikhalle bei einem Monzert keine Interferenz? **Weil die Wellen hier auch nicht kohärent sind.**

§5.2 Stehende Wellen

Es gilt hier ein wichtiges Prinzip zu beachten: Jede Störung eines Systems kann Wellen erzeugen. In der Regel geschieht das wie folgt: Die vorliegende Störung kann mittels Fourier als Summe von Wellen geschrieben werden. Es liegt aber auch eine Selektionsregel vor: Nur eine beschränkte Menge an Wellen wird sich durch Interferenz nicht auslöschen. Häufig gibt es sogar eine Frequenz f_0 , sodass nur die Vielfachen von f_0 überleben.

Wenn wir die Saite einer Gitarre zupfen, entsteht eine sogenannte stehende Welle. Die Wellen, die durch die Saite gehen, werden an den festen Ende reflektiert. Hierbei gilt aber, dass ein Wellenberg als Wellental zurückkommt und umgekehrt: Bei den Enden tritt auch eine Phasenverschiebung von 180 Grad auf. Dies ist einsichtig, wenn man sich überlegt, dass das Seil das feste Ende nach oben zieht, aber da das Ende fest ist, bleibt das Ende stehen, und die Reaktionskraft vom Ende zieht das Seil nach unten. Andererseits ist auch klar, dass diese Phasenverschiebung notwendig ist, um

das Ende an der festen Stelle zu halten. Dies ist ein allgemeines Phänomen bei einem festen Ende: es tritt eine Phasenverschiebung von 180 Grad auf.

Die Wellen, die sich nicht selbst auslöschen, sind genau die, sodass die Saitenlänge ein Vielfaches von $\lambda/2$ ist. Die Schwingung einer Saite ist somit eine Addition von Wellen mit Wellenlängen $2L$, L , $\frac{2}{3}L$, usw. wie oben schon erwähnt. Hierbei ist dann L genau so wie oben die Länge der Saite.

Zwei wichtige Begriffe bei einer stehenden Welle: Die Punkte, an denen die Auslenkung Null ist, heißen Knoten. Die Punkte, an denen die Auslenkung/Amplitude maximal ist, heißen Bäuche.

Bei einer Flöte spielen die stehenden Wellen auch eine große Rolle. Nur ist hier ein Ende nicht fest: Am Eingang, wo die Luft hineingeblasen wird, wird die Luft in Bewegung gebracht. Diese Störung kann man als Summe von Wellen schreiben. Die Schwingungen, die wir hier zuerst betrachten, sind dann die Auslenkungen der Luft. Die Luft schwingt sozusagen hin und her. Wir sind wohl beraten, nicht die Bewegungen der Moleküle zu betrachten, denn die bewegen sich (thermisch, also durch die Temperatur bedingt) so schnell, dass wir dort keine eindeutige Auslenkung sehen könnten. Besser ist es, kleine Paketchen Luft, in der Größenordnung von vielleicht einem Kubikmillimeter zu betrachten. In diesem kann man die Bewegungen der Moleküle mitteln und über die Bewegung des Luftpaketchen reden.

Dadurch dass am Ende der Flöte die Luft gar nicht festgehalten wird, ist hier ein offenes Ende. Hier ist somit ein Bauch. Man fragt sich vielleicht, warum dies für eine Reflektion sorgen kann, aber denke mal an Licht: Auch hier kann Licht von dichteren Medien zu dünneren Medien gehen – Licht kann von Wasser aus in die Luft gehen. Jeder Mediumübergang verursacht Reflektion und Transmission. Dies folgt aus den allgemeinen Randbedingungen – also aus etwas fundamentaleren Überlegungen.

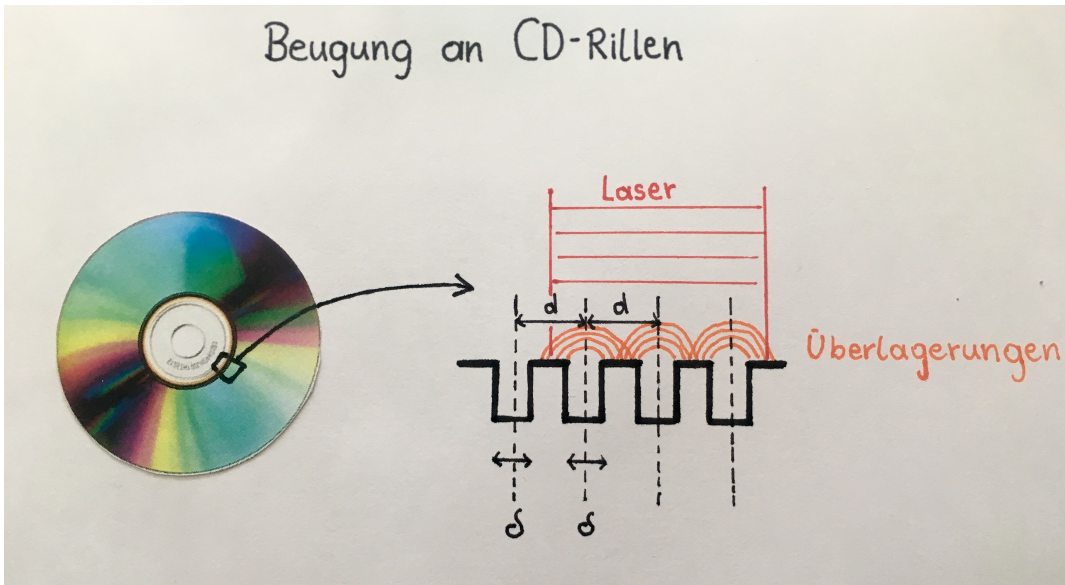
Was also in einer Flöte mit Länge L passiert: die Luft schwingt so, dass die Wellenlängen, die überleben, genau die sind, für welche $L = \lambda/4$, $L = \frac{3}{4}\lambda$, $L = \frac{5}{4}\lambda$, $L = \frac{2k+1}{4}\lambda$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Da Schall ja grundlegend als Dichteschwankungsphänomen zu betrachten ist, könnten wir auch die Dichtewellen betrachten. Hier ist aber etwas Interessantes, was am Freitag dem 3. März gut erklärt wurde: Die Bäuche der Luftschwingungen sind Knoten der Luftdruckschwankungen und umgekehrt. Die Wellen, die Luftschwingungen beschreiben, und die Wellen, die Druckschwankungen beschreiben, haben einen Phasenunterschied von 90 Grad (oder 270 Grad, in anderer Richtung betrachtet). Warum ist dies denn so? Relativ einfach: bei einem Knoten der Luftschwingungen bewegt sich mal die Luft ganz weg, aber in beiden Richtungen von diesem Ort weg, dann wieder dorthin, von beiden Seiten aber. Am Knoten sieht man also abwechselnd die Luft von dort in beide Richtungen wegziehen – eine starke Abnahme des Luftdrucks – und die Luft von beiden Seiten dort hinziehen, und somit wird dann dort die Luft zusammengepresst, was mit einer Druckzunahme korrespondiert.

Auf diese Weise betrachtet hat eine Flöte folgendes Muster: an dem Ende, wo die Luft durch eine Enge hereingeblasen wird, kann die Luft nicht ausweichen, und somit wird bei Schwingungen der Luftdruck dort zu- oder abnehmen; beim offenen Ende kann die Luft frei ausweichen, und sich somit ständig dem normalen Luftdruck außerhalb der Flöte anpassen, sodass hier ein Knoten des Luftdrucks ist. Die Wellenlängen, die in die Flöte hineinpassen, sind dann wieder dieselben.

§5.3 Interferenz bei Licht – CD-Rillen, Bragg-Reflektion

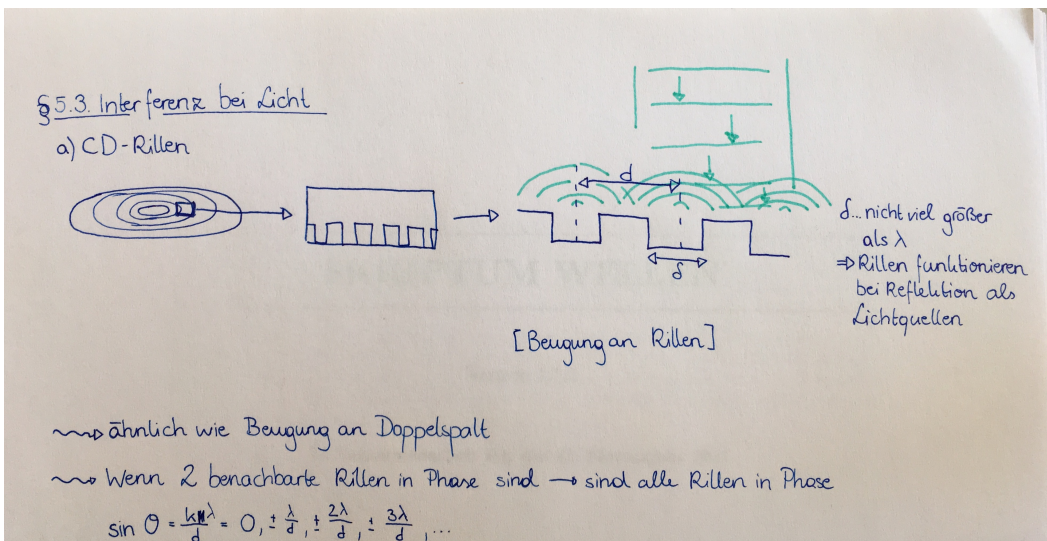
Die Rillen einer CD sind so klein, dass sie in die Nähe der Wellenlänge von Licht kommen. Darum muss man hier Beugung betrachten; Licht geht geradeaus durch eine geöffnete Tür, weil die Tür viel größer als die Wellenlänge ist, aber durch einen Spalt mit Breite $0,1 \text{ mm}$ schaut das anders aus. So auch bei einer CD. Die Rillen haben eine kleine Breite δ und funktionieren dann wie kleine Lichtquellen, die aber kohärent sind, wenn man mit einem Laserpointer auf die CD scheint.



Betrachten wir eine Richtung θ – da die Beobachter weit weg sind, dürfen und werden wir immer annehmen, dass die Lichtstrahlen, die zum Beobachter gehen, parallel sind, also durch einen Winkel bestimmt. Der Wegunterschied zwischen zwei Rillen ist dann $\Delta s = d \sin(\theta)$, wobei d die Distanz zwischen zwei Rillen ist. Die Bedingung für konstruktive Interferenz ist dann

$$d \sin(\theta) = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

In Richtungen, die nicht einem Intensitätsmaximum entsprechen, sind die Phasenunterschiede zwischen zwei benachbarten Rillen zwar nur klein, da aber in der Regel mehrere Rillen durch den Laserpointer getroffen werden, und der Phasenunterschied zwischen nicht benachbarten mit der Entfernung zunimmt, so finden sich in diesen Richtungen mehrere Phasen zusammen, die sich dann also wieder auslöschen. Die Folge ist somit, dass zwischen zwei Maxima die Intensität deutlich stark reduziert ist, fürs Auge sogar Null.



Dieses Phänomen sieht man auch beim Doppelspaltexperiment: Sind nur zwei Öffnungen da, so gibt es zwischen Minimum und Maximum deutlich einen Übergangsbereich. Sind hunderte Öffnungen da, so werden die Maxima schmaler und deutlicher und die Bereiche zwischen den Maxima haben

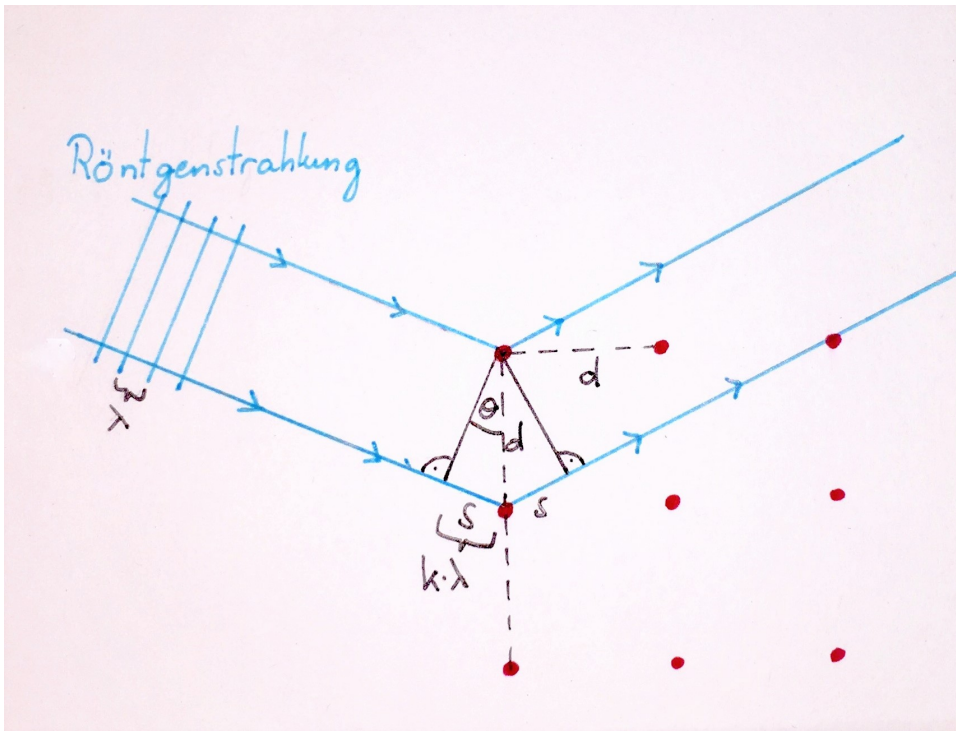


Abbildung 8: Bragg-Beugung schematisch dargestellt. Die Wellenlängen sind deutlich kleiner als die interatomären Distanzen im Gitter. Die einzelnen Atome reflektieren die Röntgenstrahlung, sodass in bestimmten Richtungen konstruktive Interferenz auftritt.

Intensität (fast) Null.

Bragg-Beugung ist die Beugung von Röntgenstrahlung am Gitter eines Festkörpers. Beschießt man ein kleines Kristall eines Minerals mit Röntgenstrahlung, so sieht man ein interessantes Muster. Für die Erklärung dieses Musters haben Papa und Sohn Bragg den Nobelpreis bekommen. So wie oft, ist die wirkliche Erklärung recht kompliziert, hier geht es in diesem Fall um eine Fourier-Analyse des Gitters, aber unten präsentieren wir ein vereinfachtes Argument. Bevor wir so weit sind, muss man die Größenordnungen verstehen: Die Distanzen zwischen den Atomen sind in der Regel im Nanometerbereich. Röntgenstrahlung hat eine Wellenlänge im Bereich $10^{-12} - 10^{-10}$ Meter, also bis zu etwa $0,1 \text{ nm}$. Somit ist ein Gitter für Röntgenstrahlung wie ein offener Raum mit einigen Hindernissen. Somit kann sie an diesen Hindernissen reflektiert werden. Das werden wir dann mal betrachten. Wir werden uns dabei das Gitter nur so einfach wie möglich vorstellen: regelmäßig und kubisch.

Bei Bragg-Beugung ist fast dasselbe Prinzip wirksam wie bei der CD; siehe Abbildung 8. Vereinfacht dargestellt passiert hier folgendes: Betrachten wir einen Teil der Wellenfront, die an der oberen Gitterschicht ankommt und an einem Atom reflektiert. Ein anderer Teil der Wellenfront geht aber durch die erste Schicht und reflektiert erst an der zweiten Schicht. Der Wegunterschied zwischen den beiden Lichtstrahlen ist dann $\Delta s = 2d \sin(\theta)$, und somit ist dann hier die Bedingung für konstruktive Interferenz

$$2d \sin(\theta) = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

§5.4 Der Doppler-Effekt

Der Doppler-Effekt beschreibt die Änderung einer emittierten Frequenz im Falle sich Quelle oder Beobachter bewegen. Man muss hier zwischen einigen Fällen unterscheiden; erstens gibt es einen Unterschied zwischen dem Doppler-Effekt für Schall und für Licht. Schall bewegt sich nur in einem Medium fort, und in diesem Medium hat Schall eine Geschwindigkeit. Es macht dann schon einiges aus, ob sich jetzt die Quelle oder der Wahrnehmer bewegt. Bei Licht gibt es nicht ein Medium, das das Licht trägt. Daher ist in diesem Fall nur die relative Geschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter von Bedeutung. Weil im Falle des Lichts auch die relativistischen Effekte mit hinbezogen werden sollten, ergeben sich hier deutlich andere Formeln, die aber für niedrige Geschwindigkeiten den Formeln des Doppler-Effekt für Schall ähnlich sind.

Betrachten wir zuerst den Fall für Schall und nehmen wir an, der Wahrnehmer bewegt sich mit Geschwindigkeit v_B auf die Quelle zu. Falls c die Schallgeschwindigkeit im Medium ist, so bewegen Wellen und Wahrnehmen sich mit Geschwindigkeit $v_B + c$ auf einander zu. Falls die Wellenlänge λ ist, so gilt einerseits wie üblich $c = \lambda f$, aber auch, dass der Wahrnehmer in einer Sekunde $(v_B + c) \cdot 1 = v + c$ Meter zurücklegt, und somit $\frac{v_B+c}{\lambda}$ Wellen pro Sekunde vorbeiziehen sieht. Somit ist die wahrgenommene Frequenz in diesem Fall:

$$f' = \frac{v_B + c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{1 + v_B/c}{1} = f \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right).$$

Falls der Wahrnehmer sich von der Quelle wegbewegt, so ändert sich das Vorzeichen der Geschwindigkeit und somit gilt dann $f' = f(1 - \frac{v_B}{c})$. Wir können dann zusammenfassen:

$$f' = f \cdot \left(1 \pm \frac{v_B}{c}\right), \quad (14)$$

wobei das $+$ -Zeichen für eine Annäherung von Quellen und Beobachter, das $-$ -Zeichen für eine Entfernung von Quelle und Beobachter zu wählen ist.

Jetzt dann der Fall, in dem sich die Quelle im Medium mit Geschwindigkeit v_Q auf einen Beobachter zu bewegt. Hier macht die Bewegung der Quelle die Wellenlänge auf der Vorderseite etwas kürzer, auf der Rückseite etwas länger. Sei f die emittierte Frequenz, so wird eine Welle ein Zeitintervall $T = 1/f$ nach der anderen ausgestrahlt. In dieser Zeit legt die erste Welle eine Strecke $cT = c/f$ zurück, die Quelle aber eine Strecke $v_Q T = v_Q/f$. Somit ist die reduzierte Wellenlänge auf der Vorderseite $\lambda' = (c - v_Q)T = (c - v_Q)/f$. Auf der Rückseite ist die Wellenlänge bis zu $\lambda' = (c + v_Q)T = (c + v_Q)/f$ verlängert. Somit ist die Frequenz f' , die der Wahrnehmer wahrnimmt, falls die Quelle sich auf ihn zubewegt:

$$f' = c/\lambda' = \frac{c}{(c - v_Q)/f} = \frac{cf}{c - v_Q} = \frac{f}{1 - \frac{v_Q}{c}},$$

und wenn sich die Quelle vom Wahrnehmer wegbewegt, ändert sich wieder das Vorzeichen von v_Q , und somit können wir den Fall der sich bewegenden Quelle durch folgende Formeln beschreiben:

$$f' = \frac{f}{1 \pm \frac{v_Q}{c}}, \quad (15)$$

wobei jetzt das Minuszeichen einer Annäherung und das Pluszeichen einer Entfernung entspricht.

Einige Kommentare:

(1) In der Regel bewegen sich Quelle und Wahrnehmer nicht direkt auf einander zu. Sie bewegen sich in der Regel an einander vorbei. **In solchen Fällen müssen die Geschwindigkeiten durch die Geschwindigkeitskomponente in Richtung von einander ersetzt werden.** Betrachten wir einfach nur den Fall des sich bewegenden Beobachters. Seine Geschwindigkeit ist dann ein Vektor \vec{v}_B mit Größe v_Q . Es sei \vec{r} der Vektor von Quelle zu Beobachter, und es machen \vec{v}_B und \vec{r} einen Winkel θ mit einander. Die Projektion von \vec{v}_Q hat Größe $v_Q \cos(\theta)$. Diese Projektion ist in der Formel für den Doppler-Effekt zu verwenden.

(2) Falls sowohl v_B und v_Q nicht Null sind, so sind die Effekte zu kombinieren $f' = f \cdot \frac{1 \pm \frac{v_B}{c}}{1 \mp \frac{v_Q}{c}}$.

(3) Falls $v_Q = c$ gibt es ein Problem, was uns nicht wundern sollte, dann bei Überschallgeschwindigkeiten gibt es eine Schallmauer. Somit ist in solchen Fällen das Anwenden der obigen Formeln nicht direkt erlaubt.

Für Licht gibt es auch einen Dopplereffekt, aber die Formel werde ich nicht herleiten; dies erfordert ein Verständnis der Lorentz-Transformationen. So wie erwähnt ist hier nur die relative Geschwindigkeit von Bedeutung, und somit sind v_B und v_Q gleichzusetzen. Die relative Geschwindigkeit wird dann mit v angedeutet und in es sei $\beta = v/c$. β beschreibt welcher Anteil der Lichtgeschwindigkeit v beträgt und kommt in der Literatur oft vor, sobald SRT eine Rolle spielt.

Eine heuristische Begründung für die folgende Formel möchte ich schon geben, ist aber nicht Stoff, und nicht einmal als Begründung erlaubt. Falls wir uns versichern, dass v_Q und v_B hier im Falle des Lichts gleich sind, so wäre man fast dazu gebracht, das obige Kommentar (2) ernst zu nehmen und zu schreiben $f' = f \cdot \frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}$. Nur haben wir dann den Doppler-Effekt zweimal angewandt; wir haben ihn sozusagen quadriert. Nun können wir dann wieder die richtige Verschiebung bekommen, indem wir das geometrische Mittel nehmen, also, die Wurzel des Faktors hinter f . Also, man wäre geneigt, zu raten, dass $f' = f \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$. Und diese Formel ist richtig. . .

Die Formel für den Doppler-Effekt des Lichts lautet

$$\boxed{f' = f \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}} \quad (16)$$

In dieser Formel wählt man + im Zähler und – im Nenner im Falle einer Annäherung und man wählt – im Zähler und + im Nenner im Falle einer Entfernung.

Ich möchte nun zeigen, dass diese Formel auf den Schall-Fall zu reduzieren ist, falls $\beta \ll 1$. Bei niedrigen Geschwindigkeiten, also, falls die Lichtgeschwindigkeit c viel größer als v ist, so gilt $\beta \ll 1$. In diesem Fall wollen wir eine Linearisierung der Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ betrachten. Eine kleine Berechnung zeigt:

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = (\sqrt{1+x})' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1+x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1+x}}{2(1-x)^{3/2}}$$

sodass auch $f'(0) = 1$. Darum gilt in der Nähe von Null

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \approx 1+x,$$

sodass $\sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \approx 1 \pm \beta$. Also auch bei Schall finden wir für niedrige Geschwindigkeiten $f' = f(1 \pm \beta)$. Achtung, die Lichtmauer gibt es nicht.

Anwendungen vom Doppler-Effekt gibt es viele:

(1) Radarmessungen und Dopplerpistole bei der Polizei.

(2) Anhand der Dopplerverschiebung der Spektrallinien (siehe Erklärung unten) kann man bestimmen, mit welcher Geschwindigkeit ein Stern sich auf uns zu oder von uns weg bewegt.

(3) Da die Atome auf einem Stern sich auch thermisch bedingt bewegen, ist eine Spektrallinie nicht eine einzelne Linie, sondern hat eine Breite; die Spektrallinie ist eine Summe von vielen Linien. Die Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ für die relative Geschwindigkeit v der Atome in der Atmosphäre eines Sterns ist eine Normalverteilung. Wenn wir die Geschwindigkeit vom Stern schon subtrahieren, so ist die mittlere Geschwindigkeit $\mu_v = 0$. Warum die Geschwindigkeitsverteilung eine Normalverteilung ist, ist jetzt noch etwas kompliziert, aber die Idee ist genau so wie bei der Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung: viele Wiederholungen von einem Zufallsexperiment, mit irgendeiner Verteilung im Hintergrund, nähert sich unter geeigneten Bedingungen der Normalverteilung an. Dies ist der Zentrale Grenzwertsatz, und sie findet sehr viele Anwendungen, man kann sie als beweisbare Variante des Gesetz der großen Zahlen betrachten.

Nun die kinetische Energie eines Atoms $\frac{1}{2}mv^2$ kann man auch über eine Menge in einem Gas mitteln. Man bestimmt dann eigentlich den Erwartungswert von v^2 . Somit ist dann $E(v^2) = \sigma_v^2$; die Temperatur ist direkt proportional zur kinetischen Energie, also zur Varianz der Geschwindigkeitsverteilung. Bei jeder Spektrallinie ist die Atomsorte, also auch die Masse bekannt, somit kann man aus der Verbreitung einer Spektrallinie auf die Temperatur schließen. Die Verbreitung ist also wegen des Doppler-Effekts der einzelnen Atome; die Breite ist also ein Maß für σ_v^2 , also für die Temperatur.

Nun, was passiert, wenn ein Exoplanet sich zwischen Stern und Erde bewegt? Man nennt so etwas einen Transit; der Exoplanet macht einen Transit; man kann dies als kleine Verdunkelung wahrnehmen. In diesem Fall passiert das Licht des Sterns auch die Atmosphäre des Exoplaneten. Falls in so einem Fall einige Spektrallinien, die mit Energieniveaus in einem Wassermolekül korrespondieren, auftreten, so weiß man, dass der Exoplanet Wasser hat, und aus der Breite weiß man dann die Temperatur, und somit, ob es geeignete Bedingungen für Leben gibt, oder nicht. An der Oberfläche eines Sterns ist es zu heiß für das Wassermolekül, es ist bei Temperaturen von einigen Tausenden Kelvin instabil, so ist man sich auch sicher, dass diese zusätzliche Spektrallinien nicht vom Stern kommen. Was alles wohl nicht im Licht eines Sterns drinnen ist . . .

Intermezzo – Spektrallinien

In einem Atom können die Elektronen nicht irgendwelche Energiewerte annehmen. Sie können nicht irgendwelche Geschwindigkeiten haben. Ihre Bahnen (Orbitale) sind diskret im Sinne, dass sie abzählbar sind. Zwischen zwei Energieniveaus gibt es nicht ein Kontinuum von Energieniveaus. Wir können die Zustände eines Elektrons in einem Atom mit den natürlichen Zahlen auflisten: $k = 1, 2, 3, \dots$ und für jedes k gibt es genau einen Zustand, welcher mit einer Energie E_k korrespondiert.

Unter Einfluss von Licht kann ein Elektron seinen Zustand wechseln: Absorbiert ein Elektron ein Photon mit geeigneter Energie, so kann ein Elektron einen Zustand mit höherer Energie einnehmen. Umgekehrt, falls ein Zustand mit niedriger Energie frei ist, so kann ein Elektron unter Ausstrahlung eines Photons mit der geeigneten Energie in den Zustand mit der niedrigeren Energie springen.

Was sind dann die geeigneten Energien? Aus Energieerhaltung folgt, dass die Energiedifferenz zweier Zustände $\Delta E = E_{k_1} - E_{k_2}$ mit der Energie des Photons korrespondieren muss. Nun hat ein Photon gehörend zur Frequenz f eine Energie $E = hf$, also die Energie des Photons ist geeignet falls

$$E_{k_1} - E_{k_2} = hf. \quad (17)$$

Diese Bedingung ist aber sehr stringent: viele Frequenzen sind ungeeignet für den Übergang eines Elektrons. Nur Licht mit der richtigen Frequenz kann ein Elektron promovieren lassen, und ein Atom kann nur Licht bestimmter Frequenzen ausstrahlen.

Falls weißes Licht durch ein Gas mit Atomen geleitet wird, so werden nur die Photonen mit richtigen Energien von Elektronen absorbiert, und die Elektronen besetzen dann höhere Energieniveaus. Aus dem weißen Licht wird dann also weißes Licht minus einigen Frequenzen. Leitet man dieses Licht dann durch ein Prisma, so sieht man den ganzen Regenbogenfarben, aber es sind schwarze Linien im Spektrum vorhanden. Dies sind die Spektrallinien eines Atomgases.

Natürlich werden die Elektronen irgendwann unter Ausstrahlung eines Photons wieder in einen energetisch niedrigeren Zustand gehen, dabei wird aber das dazu korrespondierende Licht von den Atomen in willkürlichen Richtungen ausgestrahlt. Somit tritt doch eine Verdunkelung in Forwärtsrichtung auf.

Die Spektrallinien, die ein Gas auf diese Weise verursacht, sind wie Fingerabdrücke der Atome; jedes Element hat ein eigenes Muster für die Differenzen $\Delta E(k, l) = E_k - E_l$. Somit kann man anhand der Spektrallinien in einem Lichtspektrum eines Sterns wahrnehmen, welche Elemente an der Oberfläche und in der Atmosphäre sind. Das weiße Licht ist hier die Schwarzkörperstrahlung von der Oberfläche.

Für die Sonne haben diese Spektrallinien einen eigenen Namen, sie heißen **Fraunhoferlinien**. Anhand dieser Fraunhoferlinien hat man rund 1860 schon herausgefunden, dass es auf der Sonne ein Element gibt, das noch nicht auf der Erde wahrgenommen wurde. Da auf Griechisch die Sonne Helios ($\eta\lambda\iota\omicron\varsigma$) heißt, so wurde dieses Element mit dem Namen Helium versehen, welches aber erst etwa 40 Jahre später auf der Erde nachgewiesen wurde.

Das hier oben beschriebene Spektrum ist ein Absorptionsspektrum; die Linien wurden aus weißem Licht heraus absorbiert. Es gibt auch Emissionsspektren: Hier ist ein Prozess am Laufen, der dafür sorgt, dass Elektronen in einen höheren Energiezustand befördert werden, welche dann irgendwann unter Ausstrahlung eines Photons wieder zurückfallen, wieder hinaufbefördert werden, und so weiter. Bei manchen Lampen funktioniert das Mittels Strom; durch Kollisionen mit Elektronen im Gas, werden einige Elektronen in einem Atom in einen höheren Zustand befördert. Somit entsteht ein Licht, das nur aus ganz bestimmten Farben besteht. Die alten Natriumlampen haben zum Beispiel ein sehr typisches Orange-Gelb als Farbe. Ein Emissionsspektrum ist sozusagen das Gegenteil von einem Absorptionsspektrum.

Noch eine kurze Erklärung zu den Spektrallinien von Molekülen. Betrachten wir zuerst mal ein einfaches Molekül wie O_2 . Zwei Sauerstoffatome teilen sich auf irgendeine Weise die äußeren Elektronen. So entsteht eine Bindung; die zwei Atome sind nicht mehr so leicht auseinander zu ziehen. Diese Bindung kann man sich wie eine Feder vorstellen. Wir können ein Sauerstoffmolekül mit zwei Massen, verbunden durch eine Feder, modellieren. Durch kleine Störungen kann dieses System in Schwingung versetzt werden. Nicht nur bewegt sich das System als ganzes, auch kann das Molekül eine starre Rotation durchführen, und sogar schwingen. Bei diesen Schwingungen bewegen sich die beiden Atome periodisch auf einander zu und von einander weg. Das besondere an dieser Schwingung ist aber, dass sie mit Quantenmechanik zu beschreiben ist. Nun ist das Besondere an der quantenmechanischen Beschreibung, dass sie nur abzählbar viele Energieniveaus erlaubt: Anders als bei der klassischen Feder sind die Energien nicht beliebig, sondern von der Gestalt $E_n = \epsilon(n + \frac{1}{2})$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ und ϵ die Energiedifferenz zwischen zwei auf einander folgenden Energieniveaus. Das O_2 -Molekül kann durch Kollisionen mit anderen Molekülen ins Schwingen versetzt werden, und so ein Energieniveau E_n mit $n > 0$ besetzen. Auch durch Absorption eines Photons mit der Frequenz f bestimmt durch $hf = E_n - E_0 = n\epsilon$ kann das Molekül ein höheres Energieniveau erreichen. Bestrahlt man ein O_2 -Gas mit weißem Licht, so werden genau die Frequenzen korrespondierend mit $hf = n\epsilon$ absorbiert. Nun ist dies nicht die ganze Geschichte, auch die starren Rotationen haben ein ähnliches äquidistantes Energiespektrum. Bei etwas komplexeren Molekülen wie H_2O gibt es natürlich noch etwas komplexere Spektren als bei ganz einfachen Molekülen, aber das Prinzip ist gleich: Nur abzählbar viele Energieniveaus können besetzt werden, sodass das Spektrum diskret ist. Das Ergebnis impliziert, dass das Absorptionsspektrum ein bestimmtes, identifizierbares Linienmuster bedingt.

Zusatz – Maxwellverteilung

Verteilung für das Tempo v der Moleküle in einem idealen Gas. Hierbei ist v die Größe der Geschwindigkeit.

$$f(v) \sim v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Mittelwert $E(v) = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, $E(v^2) = \frac{3kT}{2m}$. Aus letzter folgt dann, dass die mittlere kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ ist. Für so ein ideales Gas ist die kinetische Energie also direkt proportional zur absoluten Temperatur (in Kelvin!).
(Bilder von Verteilungen)

Zusatz – Temperatur und Normalverteilung

Hier betrachtet man nur eine Komponente der Geschwindigkeit.

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi kT/m}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

Gaussisch mit Mittelwert Null und Varianz $E(v_x^2) = \sigma^2 = \frac{kT}{2m}$. Somit kann man dann auch das vorige Ergebnis der Maxwell-Verteilung zurückfinden: Für v_y und v_z gelten gleiche Verteilungen, sodass $E(v^2) = E(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{kT}{2m} + \frac{kT}{2m} + \frac{kT}{2m} = \frac{3kT}{2m}$.

Diese Verteilung für v_x ist gebraucht, wenn man die Breite der Spektrallinien erklären will. Die Spektrallinien sind eigentlich eine Menge an einzelnen ganz dünnen Spektrallinien von individuellen Atomen. Ihre Geschwindigkeit in Richtung des Beobachters ist aber verteilt wie v_x . Die Breite der Spektrallinie ist somit wie die Breite der Verteilung, also direkt proportional zu T . Daher kann man auf die Temperatur von Exoplaneten und anderen Sternen schließen.

(Bilder von Verteilungen)

Zusatz – Explizites Beispiel aus der Fourieranalyse

Die periodische Funktion $f(x)$ definiert durch $f(x) = 0$ falls $x \in (-1; 0]$ und $f(x) = 1$ falls $x \in (0; 1]$, die aber mit Periode 2 periodisch fortgesetzt wird, kann man schön mit Sinuswellen beschreiben. Zuerst muss man mal die Funktion verstehen: Wenn $x \notin [-1; 1]$, so können wir immer vielfache von 2 subtrahieren, oder addieren, sodass wir im Intervall $[-1; 1]$ landen. Zum Beispiel $15, 37 - 16 = -1, 63$. Also, für jede Zahl x gibt es ein Vielfaches U von zwei, sodass $x - U \in [-1; 1]$. Wir definieren dann $f(x) = f(x - U)$. Der Graph der Funktion verdeutlicht alles.

Man kann zeigen, dass

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\pi x)$$

Dies ist wie folgt zu verstehen; für endliche Zahlen N gilt, dass

$$f_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\pi x)$$

Annäherungen von f sind, und diese werden besser, wenn N größer wird. Mit Sinus und Cosinus kann man mal also auch eckige Funktionen beschreiben.

Index

- Überlagerung, 15

- Absorptionsspektrum, 21
- Adiabatischer Temperaturgradient, 8
- Amplitude, 4
- Auftrieb, 7

- Bauch, 16
- Bragg-Beugung, 17

- Destruktive Interferenz, 14
- Doppelspalt, 14
- Doppler-Effekt, 6, 18

- elektrisches Feld, 13

- f-Wellen, 7
- Federkonstante, 10
- Fourieranalyse, 14
- Fraunhoferlinien, 21
- Frequenz, 2

- g-Wellen, 7
- Gangunterschied, 13
- Gesetz von Hooke, 10
- Gradient, 7

- Hookes Gesetz, 9

- Knoten, 16
- Kohärenz, 13
- Konstruktive Interferenz, 14
- Kreisfrequenz, 2

- Lärmpegel, 9
- Lautstärke, 5
- Linearisierung, 3, 10
- longitudinal, 6
- Lorentzkraft, 13
- Love-Waves, 6
- Luftdruck, 5

- magnetisches Feld, 13
- monochromatisch, 13

- Oberflächenspannung, 8

- P-Wellen, 6
- p-Wellen, 7
- Pendelformel, 4
- Periode, 1
- Phase, 2, 12
- Phonon, 12
- Plancks Formel, 12

- Pseudo-Teilchen, aka Quasi-Teilchen, 12

- Rayleigh-waves, 6

- S-Wellen, 6
- Satz des Archimedes, 8
- Schallgeschwindigkeit, 6
- Scherung, 6
- Schwerewelle, 9
- Schwingungsdauer, 4
- Spektrallinien, 20
- stabilisierende Kraft, 7, 8
- stehende Welle, 15

- thermische Bewegung, 9
- Tonhöhe, 5
- transversal, 6
- Tsunamiwellen, 9

- Wellenfront, 13
- Wellenlänge, 1
- Wellenvektor, 2

- Zweites Axiom von Newton, 3