Planungsblatt Physik für die 8B

Woche 5 (von 03.10 bis 07.10)

Hausaufgaben [1]

Bis Freitag 07.10:
Lerne die Notizen von Dienstag! Aufgabe zum Nachdenken: Ein Raumschiff fliegt an der Erde vorbei; sein Geschwindigkeit beträgt 70% der Lichtgeschwindigkeit. Aus einer Kanone des Raumschiffes wird eine Kugel nach vorne geschossen (auf ein anderes Raumschiff zielend). Die Geschwindigkeit der Kugel relativ zum Raumschiff ist 80% der Lichtgeschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit der Kugel für uns, Beobachter auf der Erde, mehr oder weniger als die Lichtgeschwindigkeit? (Wiederholung!)

Bis Dienstag 11.10:
Lerne die Notizen von Woche 5! **Erledige / Lerne** das Arbeitsblatt zu SRT.

Kernbegriffe dieser Woche:

Zeitdilatation, Längenkontraktion, Lorentztransformationen, kosmische Myonen, Leiter-Garage-Paradoxon

Ungefähre Wochenplanung

Schulübungen.

(a) Dienstag (3.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) ein kleiner Vortrag von einer von euch, (iii) das Arbeitsblatt zu SRT

(b) Freitag (5.Std): (i) HÜ-Bespr. und evt. mSWH, (ii) Diese Stunde drei Sachen: das Arbeitsblatt, ein Artikel von Brian Greene und der Doppler-Effekt (relativistisch).

Den Artikel von Brian Greene finden wir auf:

`http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/special-relativity-nutshell.html`

Für Interessierte gibt es hier auch noch eine lustige, aber lernsame Website:

`http://www.science4all.org/article/spacetime-of-special-relativity/`

Unterlagen auf `www.mat.univie.ac.at/~westra/edu.html`

[1] Für manche Aufgaben wird auf Rückseite/Anhang/Buch/Arbeitsblatt verwiesen.

Ein kleines AB zu SRT

A Kontrolliere, dass die Größe $\beta = v/c$ unabhängig von den gewählten Einheiten ist. Drücke die Formeln für die Lorentzkontraktion und die Zeitdilatation in β aus.

B Mache ein Diagramm für die Funktion $f(\beta) = \sqrt{1-\beta^2}$ und auch für die Funktion $g(\beta) = \frac{1}{f(\beta)}$.

C Jemand fährt in einem Boliden mit $\beta = 0,5$ auf eine rote Ampel zu. Welche Farbe nimmt man im Boliden wahr? Wähle realistische Wellenlänge/Frequenzen für das Licht! Ich gebe weiters noch $\lambda f = c$. Rot: $\lambda \approx 650nm$.

D Von Zwillingen wird die eine Person (Baby) hier auf Erde alt /älter. Die zweite wird mit genügend Futter, Sauerstoff und sonstigem, was ein Baby braucht, auf eine Reise zum Stern Alpha Centauri geschickt. Dort angekommen wird das Raumschiff sofort umgedreht, um wieder zurückzufliegen. Wir nehmen mal an, die Geschwindigkeit ist ca. 75% der Lichtgeschwindigkeit. Alpha Centauri ist der Stern, der uns am nächsten steht (bis auf die Sonne), und die Entfernung beträgt 4,2 Lichtjahre. Was ist der Altersunterschied, wenn die Zwillinge sich wieder sehen?

E Wenn ein Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit fliegt (so wie Photonen), dann darf es nicht instabil sein, also, die Halbwertszeit muss unendlich sein. Warum ist das so?

F Die relativistische Formel für die kinetische Energie ist etwas komplizierter: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, wobei wieder $\beta = v/c$. Hierzu zwei Fragen: warum muss $v < c$ sein, wenn etwas eine Masse hat? Und zweitens, benutze die Annäherung $(1-x^2)^\alpha \approx 1 - \alpha x^2$, welche gültig ist, wenn $x << 1$, um zu zeigen, dass die kinetische Energie für niedrige Geschwindigkeiten aus zwei Teilen besteht: aus mc^2 (Ruheenergie) und die „normale“ kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$.

Einige Notizen zu SRT

(0) Im Unteren bewegt sich ein Koordinatensystem mit Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung. Die Koordinaten im ruhenden Koordinatensystem werden mit x, y, z, t angedeutet. Die Koordinaten im sich bewegenden System werden mit x', y', z' und t' angedeutet. Die räumlichen Koordinatenachsen sind parallel.

(1) Die Formel $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ beschreibt wie Zeitintervallen wahrgenommen werden, wenn sich ein Wahrnehmer bewegt. Die sich bewegende Uhr ist langsamer. Nota bene, die Uhr bleibt im sich bewegenden Koordinatensystem still stehen! Also $\Delta x' = 0$.

(2) Falls zwei Ereignisse sowohl im sich bewegenden System wie auch im ruhenden System nicht am selben Platz sind, dann hängen die Zeit- und Koordinatenintervalle wie folgt zusammen

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Des Weiteren $\Delta y = \Delta y'$ und $\Delta z = \Delta z'$. Diese Transformation vom einen Koordinatensystem ins andere heißt eine Lorentztransformation. Diese müsst ihr nicht auswendig lernen, noch anwenden können. Die Herleitung basiert auf folgenden Annahmen: Die Transformation ist linear, die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Koordinatensystemen gleich, und falls $\Delta x' = 0$, dann findet man $\Delta x = v\Delta t$, was heißt, dass sich der Ursprung des sich bewegenden Koordinatensystems mit Geschwindigkeit v relativ zum ruhenden Koordinatensystem bewegt.

(3) Die Lorentzkontraktion wird durch $L = L'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ beschrieben. Somit wird ein sich bewegender Lineal kürzer werden. Im Ruhezustand betrachtet ist ein Lineal am längsten.

(4) Verwirrend ist immer Folgendes: Die Formeln für die Zeitdilatation (siehe (1)) und die Längenkontraktion sind ähnlich, aber der Stricht (Akzent) steht auf der anderen Seite. Jedoch spricht man von Dilatation und Kontraktion! Daher muss man sich die Phrasen dazu merken: Eine sich bewegende Uhr tickt langsamer, und zwar mit einem Faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$; ein sich bewegender Stab verkürzt sich, und zwar mit demselben Faktor!

(5) Oben in der Atmosphäre werden durch in die Atmosphäre eindringende Protonen Myonen (μ) erzeugt. Diese fliegen mit einer Geschwindigkeit, die sich recht gut der Lichtgeschwindigkeit annährt auf die Erde zu.

(5a) Diese Myonen nehmen die Atmosphäre als viel dünner wahr als wir; wir sehen eine etwa 10km dicke Atmosphäre. Wenn die Myonen eine Geschwindigkeit von 97% der Lichtgeschwindigkeit haben, sodass $v/c = 0,97$, sehen sie die Atmosphäre um einen Faktor $\sqrt{1-(0,97)^2} \approx 0,24$ kürzer, also nur noch 2400 meter. Somit dauert diese Strecke für die Myonen nur etwa

$$\Delta t' = \frac{2400m}{0.97c} \approx 8,35\cdot 10^{-6}s = 8,25\mu s\,.$$

Da die Halbwertszeit $\tau_{1/2} \approx 2,2\mu s$ beträgt, kann man sagen $\Delta t' \approx 3,75\tau_{1/2}$. Somit wird ein Anteil von etwa $(0,5)^{3,75} \approx 0,074$, also etwa 7% die Erde erreichen. Der Rest zerfällt.

(5b) Wir nehmen die Zeit der Myonen wie folgt wahr: Diese Teilchen legen eine Strecke von etwa 10km mit einer Geschwindigkeit von etwa 97% der Lichtgeschwindigkeit zurück. Daher dauert für uns diese Myonenreise etwa $\Delta t = \frac{10.000}{0,97\cdot c} \approx 34,5\cdot 10^{-6}s = 34,5\mu s$. Das sind also $34,5/2,2 \approx 15,7$ Halbwertszeiten. Somit würde man naiv erwarten, dass nur ein Anteil von $(0,5)^{15,7} \approx 2\cdot 10^{-5}$ die Erde erreichen würden. Wir messen aber viel mehr! Die Myonen zerfallen natürlich nach der „Uhr" der Myonen selbst. Für sie ist aber die Zeitreise verkürzt. Die Zeitspanne wird mit der Zeitdilatation um einen Faktor 0,24 verkürzt. Daher „spüren" die Myonen ein Zeitintervall von $0,24\cdot 15,7 = 3,768$ Halbwertszeiten. Das ist bis auf Rundungsungenauigkeiten genau in Übereinstimmung mit (5a) – dort waren es 3,75 Halbwertszeiten. Die Geschichte der Myonen kann also mit Zeitdilatation und mit Lorentzkontraktion erklärt werden: Wir messen auf der Erde mehr kosmische Myonen als man ohne SRT vermuten würde.

(6) Elegante Herleitung von der Lorentzkontraktion. Nehmen wir einen Stab mit Länge L' im sich bewegenden Koordinatensystem. Wir fertigen aber noch einen Stab mit derselben Länge L' an. Diese stellen wir unter einem Winkel von 90 Grad im sich bewegenden Raumschiff auf. Der eine Stab weist nach vorne in der Bewegungsrichtung, der andere weist nach oben. An den Enden befestigen wir Spiegel, in der Ecke eine Lichtquelle, die gleichzeitig zwei Lichtpackete zu den jeweiligen Spiegeln schicken kann. Im sich bewegenden Koordinatensystem sehen wir also das, dass wir zwei Lichtpackete sich zu einem Spiegel und dann wieder zurück bewegen. Die Zeit zwischen dem Senden und Ankommen dauert dann $\Delta t' = 2L'/c$.
Nun, im sich ruhenden Koordinatensystem sehen wir, dass zwei Lichtpackete gleichzeitig losgeschickt werden, und auch wieder gleichzeitig ankommen. Diese beiden Ereignisse müssen gleichzeitig sein, da sie am selben Ort stattfinden; entweder prallen sie aufeinander (z.B. könnte das eine Explosion verursachen, wenn wir eine Bombe so einstellen), oder nicht (und eine Bombe kann nicht schon und doch auch nicht explodieren). Somit wissen wir (siehe Herleitung von Zeitdilatation), dass gilt: $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.
Sei nun L die Länge des sich in x-Richtung bewegenden Stab. Im sich ruhenden Koordinatensystem muss das sich in x-Richtung bewegende Licht zuerst einen Spiegel auf Distanz L, der sich mit Geschwindigkeit v nach vorne bewegt erreichen; das dauert hier eine Zeitspanne $\frac{L}{c-v}$. Dann muss das Licht die Strecke der Länge L zurück zur Quelle, die sich mit Geschwindigkeit v zum Licht hin bewegt, zurücklegen. Das dauert eine Zeitspanne $\frac{L}{c+v}$. Daher misst der sich in Ruhe befindenden Wahrnehmer eine Zeit

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2}\,.$$

Da $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ und wir die linke Seite davon in L' ausdrücken könne, die rechte in L, so finden wir eine Beziehung zwischen L' und L, welche genau die behauptete Formel ist – dies ist eine gute Algebraübung mit Hinweis $c^2 - v^2 = c^2(1-\frac{v^2}{c^2}) = (c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}})^2$.
Elegante Schlussfolgerung ist auch: Im sich ruhenden Koordinatensystem sind die zwei Stäbe nicht mehr gleich lang!
(7) Addition von Geschwindigkeiten ist in SRT ganz anders. Relativgeschwindigkeiten berechnet man nicht mehr mit einer einfachen Addition oder Subtraktion.
(8) Wenn sich eine Lichtquelle mit Geschwindigkeit v auf uns zubewegt, wird die ausgestrahlte (emitierte) Frequenz f etwas verschoben wahrgenommen, und zwar nehmen wir die Frequenz f' wahr, welche durch folgende Formel gegeben ist:

$$f' = f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,.$$

Falls die Lichtquelle sich von uns weg bewegt, dann dreht sich das Vorzeichen von v um.
(9) Lorentz-Transformationen: Sei K ein Koordinatensystem mit den Koordinaten (t, x, y, z). Sei weiter K' ein Koordinatensystem mit Koordinaten (t', x', y', z'), das sich relativ zu K in positiver x-Richtung bewegt. Wir dürfen immer die Achsen in K' so drehen, dass die x'-Achse parallel zur x-Achse, die y'-Achse parallel zur y-Achse und die z'-Achse parallel zur z-Achse ist. Des Weiteren können wir die Uhren so verschieben, dass der Urpsrung von K' mit dem Ursprung von K zusammenfällt zur Zeit $t = t' = 0$. Dann ist zu zeigen, dass die Koordinaten durch folgende Beziehungen mit einander verknüpft sind:

$$z' = z, y' = y, x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Ein Event ist ein Ereignis, dass ein einem bestimmten Zeit und an einem bestimmten Ort stattfindet. Zum Beispiel das wegschicken eines Lichtsignals ist ein Event. Um dies zu beschreiben, brauchen wir also vier Koordinaten! Doe oben stehenden Lorentz-Transformationen können auch so verstanden werden: Falls es zwei Events gibt, die zeitlich durch ein Zeitintervall Δt und ortlich durch Intervalle Δx, Δy und Δz getrennt sind, dann gilt

$$\Delta z' = \Delta z, \Delta y' = \Delta y, \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Seien jetzt Event 1 und Event 2 zwei Ereignisse, die die Bahn eines Lichtstrahls beschreiben: Bei Event 1 wird ein Lichtstrahl losgeschickt, Bei Event 2 wird er absorbiert. Da dies ein Lichtstrahl ist, muss die Geschwindigkeit des Lichts durch $c\Delta t = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ gegeben sein. Oder, in anderen „Worten“:

$$c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\,.$$

Nun berechnen wir die Größe $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$ in K'. Falls hier Null auskommt, dann ist auch in K' die Geschwindigkeit des Lichtsignals c – was auch sein sollte. Schritt 1: Kontrolliere, dass

$$c^2(\Delta t')^2 = \frac{c^2(\Delta t)^2 - 2v\Delta t\Delta x + \frac{v^2}{c^2}(\Delta x)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \quad (\Delta x')^2 = \frac{(\Delta x)^2 - 2v\Delta t\Delta x + v^2(\Delta t)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Schritt 2: Kontrolliere mit dem vorigen Schritt, dass $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$. Ein Hinweis dabei ist $c^2 - v^2 = c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})$. Schritt 3: Vervollständige das Argument, das zeigt, dass die Lorentz-Transformationen die Lichtgeschwindigkeit bewahren.