El lema de Yoneda

D. B. Westra

7 de marzo de 2007

Resumen

El lema de Yoneda es un ingrediente importante en el desarrollo de la teoría de categorías y tambien como herramiento en muchos campos de matemáticas (non numericos). Por eso, utilicé la demonstracion del lema como buen material para estudiar el uso de categorías y functores. Aqui presento la demonstración completa del lema con casí cada detalle.

1. Los ingredientes

Para no hacernos daño tomamos categorías concretas en cuales los objetos son conjuntos con quizás poca estrutura, como la de las k-álgebras por un cuerpo k. La categoría de los conjuntos es denotado con $\mathcal{S}$.

1.1. Functores Asociados con Objetos

Tomemos una categoría $\mathcal{A}$ y denotemos el conunto de los objetos (sí, es un conjunto de conjuntos) con $\mathcal{A}^o$. Contemplemos por un objeto $A \in \mathcal{A}^o$ el functor asociado l_X definido por:

$$l_A : \mathcal{A} \to \mathcal{S}\,, \quad l_A(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)\,. \tag{1}$$

Por supuesto que tenemos que verificar si l_A es de verdad un functor. Por eso, supongamos que $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$. Entonces, si definimos la acción de l_A como:

$$l_A(u) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) = l_A(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Y) = l_A(Y)\,,\ \ l_A(u) : \gamma \mapsto u \circ \gamma\,. \tag{2}$$

Tenemos que verificar $l_A(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{l_A(X)}$, cual es trivial, porque $l_A(\mathrm{id}_X) : \gamma \mapsto \gamma$ con la definición eqn.(2) con $Y = X$ y $u = \mathrm{id}_X$. La otra demanda que tenemos que verificar es que si el functor es covariante o contravariante. Si tenemos objetos X, Y y Z con morfismos $u : X \to Y$ y $w : Y \to Z$, y un $\gamma \in \mathrm{Hom}_A(A, X)$ tenemos

$$l_A(u \circ w)(\gamma) = (u \circ w) \circ \gamma = u \circ (w \circ \gamma) = l_A(u) \circ l_A(w)(\gamma) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Z)\,, \tag{3}$$

y el functor es un functor covariante; $l_A(u \circ w) = l_A(u) \circ l_A(w)$.

En la misma manera podemos definier un functr r_A para un objeto $A \in \mathcal{A}^o$:

$$r_A : \mathcal{A} \to \mathcal{S}\,, \quad r_A : X \mapsto r_A(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, A)\,. \tag{4}$$

Si tenemos una aplicación $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, $u : X \to Y$, la unica posible es definir la acción de r_A sobre u como:

$$r_A(u) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,A)\,, \quad r_A(u) : \gamma \ \mapsto \gamma \circ u\,. \tag{5}$$

En lo siguiente es muy importante realizarte que en la definición de una categoría los morfismos tienen una multiplicación asociativa y que la acción de l_A o r_A sobre morfismos es multplicación del lado opuesto.

1.2. Transformaciones Naturales

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías y F y G functores covariantes de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$. Una transformacíon natural τ consiste de una familia $\{\tau_X | X \in \mathcal{C}^o\}$ de $\mathcal{D}$-morfismos tal que el diagrama siguiene conmuta para todos $X, Y \in \mathcal{C}^o$ y $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(u)"] & G(X) \arrow[d, "G(u)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Sean A, B objetos en $\mathcal{A}$ y sea $\sigma : B \to A$ un morfismo; podemos fabricar una transformación natural $\tau^{AB} : l_A \to r_B$. Para entender como, miremos a las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} l_A(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X) = r_X(A)\,, \\ l_B(X) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,X) = r_X(B)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces, necesitamos una coleción de mapas $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,X)$, para cada X. Pues, podemos utilizar el morfismo $\sigma : B \to A$ así: τ^{AB} es una coleción $\left\{\tau_X^{AB} | X \in \mathcal{A}^o\right\}$ definida por:

$$\begin{aligned} &\tau_X^{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,X)\,, \\ &\tau_X^{AB}\gamma \mapsto \gamma \circ \sigma\,. \end{aligned} \tag{7}$$

La verificación que τ es natural es fácil; supongamos que tenemos objetos X, Y y un morfismo $u : X \to Y$ (y recordemos que tenemos $\sigma : B \to A$, así que tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X) \arrow[r, "\tau_X^{AB}"] \arrow[d, "l_A(u)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,X)(X) \arrow[d, "l_B(u)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,Y) \arrow[r, "\tau_Y^{AB}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,Y)
\end{tikzcd}$$

Supongamos que tenemos $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,X)$, entonces:

$$\begin{aligned} l_B(u) \circ \tau_X^{AB}(\gamma) &= l_B(u)(\gamma \circ \sigma) = u \circ (\gamma \circ \sigma) = u \circ \gamma \circ \sigma\,, \\ \tau_Y^{AB} \circ l_A(u)(\gamma) &= \tau_Y^{AB}(u \circ \gamma) = (u \circ \gamma) \circ \sigma = u \circ \gamma \circ \sigma\,, \end{aligned} \tag{8}$$

y el diagrama es conmutativo por la asociadividad. Entonces, solamente con los objetos y los morfismos hemos construido functores y transformaciones naturales.

Pero, si tenemos una transformación natural $\tilde{\tau} : l_A \to l_B$, podemos encontrar un elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$. En el diagrama anterior tomamos $X = A$ y $\gamma = \mathrm{id}_A$:

$$\tilde{\tau}_A : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)\,, \quad \tilde{\tau}_A(\mathrm{id}_A) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)\,. \tag{9}$$

Tenemos que percatarnos que el unico morfismo que siempre - en cada categoría - es presente es la identidad para cada morfismo. Si tomamos la tranformación $\tilde{\tau} = \tau^{AB}$ inducida por $\sigma : B \to A$ encontramos:

$$\tau_A^{AB}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A \circ \sigma = \sigma\,. \tag{10}$$

Entonces, parece que podemos olvidar los morfismos y los objetos de una categoría si tenemos los functores l_A y las transformaciones naturales. El lema de Yoneda es exactamente esto!

2. El lema y la demonstracíon

El lema de Yoneda dice que:

Lemma 2.1. *Las aplicaciones anteriormente definidas $\sigma \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A) \mapsto \tau^{AB}$ y $\tilde{\tau} \mapsto \tilde{\tau}_A(id_A) \in Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$ son inversas el uno al otro.*

Un parte ya hemos demonstrado: $(\sigma : B \to A) \mapsto (\tau^{AB} : l_A \to l_B) \mapsto (\sigma : B \to A)$. Entonces necesitamos verificar el otro orden.

Supongamos que $\tilde{\tau}^{AB}$ es una transformación natural de l_A a l_B y definamos:

$$\tilde{\sigma} : B \to A\,, \quad \sigma = \tilde{\tau}_A^{AB}(\mathrm{id}_A)\,, \tag{11}$$

y desde el morfisme construimos τ^{AB} tal que

$$\tau_X^{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X)\,, \quad \tau_X^{AB} : \gamma \mapsto \gamma \circ \tilde{\sigma} = \gamma \circ \tilde{\tau}_A^{AB}(\mathrm{id}_A)\,. \tag{12}$$

Pero, $\ldots \tilde{\tau}^{AB}$ es una transformación natural, entonces tenemos el diagrama conmutativa:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A) \arrow[r, "\tilde{\tau}_A^{AB}"] \arrow[d, "l_A(\gamma)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)(X) \arrow[d, "l_B(\gamma)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) \arrow[r, "\tilde{\tau}_X^{AB}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, X)
\end{tikzcd}$$

donde $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X) = l_A(X)$. Lo anterior implica:

$$\begin{gathered}
l_B(\gamma) \circ \tilde{\tau}_A^{AB}(\mathrm{id}_A) = \tilde{\tau}_X^{AB} \circ l_A(\gamma)(\mathrm{id}_A)\,, \Rightarrow \\
\gamma \circ \tilde{\tau}_A^{AB}(\mathrm{id}_A) = \tilde{\tau}_A^{AB}(\gamma \circ \mathrm{id}_A) = \tilde{\tau}_X^{AB}(\gamma)
\end{gathered} \tag{13}$$

Pero, al lado derecho vemos que $\gamma \circ \tilde{\tau}_A^{AB}(\mathrm{id}_A)$ coincide segun la definición con $\tau_X^{AB}(\gamma)$ y entonces, el resultado es:

$$\tau_X^{AB}(\gamma) = \tilde{\tau}_X^{AB}(\gamma)\,. \tag{14}$$

Eso era exactamente lo que teníamos que probar!

2.1. Ultimas Palabras

El lema de Yoneda demuestra que tenemos una correspondencía entre al un lado objetos y morfismes en una categoría y al otro lado los functores, asociados con objetos, y las transformaciones naturales. En algunos casos es una ventaja definir los objetos en una categoría por functores. Por ejemple, los grupos álgebraicos pueden ser definido por functores en tal manera que son tambien grupos con una multiplicacíon natural... Ve las notas de J.S. Milne sobre grupos algebraicos y aritmeticos que puedes encontrar en su pagina web. Tambien los supergrupos pueden ser definido en tal manera. Todo eso funciona por el lema de Yoneda.