

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 17.10.2025

Zadanie 1. Przypomnijmy, że ℓ_∞ jest przestrzenią ciągów ograniczonych, tzn.

$$\ell_\infty := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$$

wyposażoną w normę supremum. Pokazać, że jej podprzestrzeń

$$c := \{x = (x_k) \in \ell_\infty : \text{ciąg } (x_k) \text{ jest zbieżny}\}$$

oraz

$$c_0 := \{x = (x_k) \in \ell_\infty : \text{ciąg } (x_k) \text{ jest zbieżny do } 0\}$$

to przestrzenie Banacha.

Zadanie 2. Niech ℓ_p oznacza przestrzeń ciągów o skończonej p -tej normie, tzn.

$$\ell_p := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\},$$

gdzie

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

- (a) Pokazać, że jeśli $q > p$, to $\ell_p \subset \ell_q$.
- (b) Pokazać, że dla dowolnego ciągu $x = (x_k)$ zachodzi $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.
- (c) Znaleźć ciąg $x = (x_k)$ taki, że $\|x\|_p = +\infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
- (d) Czy $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$?

Zadanie 3. Zdefiniujmy operator $T : \ell_1 \rightarrow c_0$ wzorem

$$(T(x))_k := \sum_{j=k}^{\infty} x_j$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wykazać, że operator T jest ciągły i obliczyć jego normę.

Zadanie 4. Oznaczmy przez ℓ_p^n przestrzeń wektorów o skończonej p -tej normie, tzn.

$$\ell_p^n := \{x = (x_k)_{k \in \{1, \dots, n\}} : \|x\|_p < \infty\}.$$

Niech $q > p \geq 1$. Obliczyć normę odwzorowania identycznościowego

$$id : \ell_p^n \rightarrow \ell_q^n.$$

Zadanie 5. Sprawdzić, że zbiór

$$X = \left\{ x = (x_k) : \|x\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq 1 \right\} \subset \ell_2$$

jest domkniętym i wypukłym podzbiorem ℓ_2 . Pokazać, że X ma puste wnętrze. Czy X jest zwarty?

Zadanie 6. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną oraz $1 \leq p_0 < p < p_1$. Wykazać, że każdą funkcję $f \in L^p(X, \mu)$ można zapisać w postaci $f = f_1 + f_2$, gdzie:

- (a) $f_1 \in L^1(X, \mu)$ oraz $f_2 \in L^\infty(X, \mu)$;
- (b) $f_1 \in L^{p_0}(X, \mu)$ oraz $f_2 \in L^{p_1}(X, \mu)$.