

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 24.10.2025

Zadanie 1. Niech X i Y to przestrzenie Banacha. Oznaczmy przez $B(X, Y)$ przestrzeń operatorów liniowych ograniczonych z X do Y . Sprawdzić, że norma operatorowa zadana dla $T \in B(X, Y)$ wzorem

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

faktycznie definiuje normę na $B(X, Y)$. Czy $B(X, Y)$ jest przestrzenią Banacha?

Zadanie 2. Udowodnić *lemat Riesz*: niech X będzie przestrzenią unormowaną, a $Y \subsetneq X$ jest domkniętą podprzestrzenią. Pokazać, że dla każdego $\theta \in (0, 1)$ istnieje $x \in X$ takie, że $\|x\| = 1$ oraz

$$\|x - y\| \geq \theta \quad \text{dla każdego } y \in Y.$$

Zadanie 3. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną. Ustalmy $1 < p \leq q < \infty$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Załóżmy, że $f \in L^p(X, \mu)$ oraz $g \in L^q(X, \mu)$. Pokazać, że w nierówności Höldera

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe $\alpha, \beta \geq 0$ (co najmniej jedna z nich dodatnia) takie, że

$$\alpha |f|^p = \beta |g|^q \quad \mu - \text{p.w.}$$

Zadanie 4. Oznaczmy przez ℓ_p^n przestrzeń wektorów o skończonej p -tej normie, tzn.

$$\ell_p := \{x = (x_k)_{k \in \{1, \dots, n\}} : \|x\|_p < \infty\}.$$

Niech $q > p \geq 1$. Obliczyć normę odwzorowania identycznościowego

$$id : \ell_q^n \rightarrow \ell_p^n.$$

(Uwaga: jest to odwzorowanie w odwrotną stronę niż w poprzednim tygodniu.)

Zadanie 5. Ustalmy $p \geq 1$. Niech $T : L_p[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ będzie odwzorowaniem zadanym wzorem $(Tf)(x) = xf(x)$. Znaleźć normę operatora T .

Zadanie 6. Pokazać, że ℓ_p jest izometryczne z pewną podprzestrzenią $L^p(0, 1)$.

Zadanie 7. Pokazać, że przestrzeń $L^p(0, 1)$ jest izometryczna z $L^p(\mathbb{R})$.