

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 31.10.2025

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Przestrzenią dualną do X , oznaczaną X^* , nazywamy przestrzeń Banacha

$$X^* := B(X, \mathbb{R})$$

(tzn. przestrzeń liniowych i ciągłych funkcjonałów na X).

- (a) Pokazać, że każde $y \in \ell_\infty$ zadaje liniowy i ciągły funkcjonal na ℓ_1 wzorem

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

dla każdego $x \in \ell_1$.

- (b) Pokazać, że każdy liniowy i ciągły funkcjonal na ℓ_1 jest postaci

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

dla pewnego $y \in \ell_\infty$.

- (c) Wywnioskować, że $(\ell_1)^* = \ell_\infty$.

Zadanie 2. Przeprowadzić podobne rozumowanie dla przestrzeni c_0 , tzn.:

- (a) Pokazać, że każde $y \in \ell_1$ zadaje liniowy i ciągły funkcjonal na c_0 wzorem

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

dla każdego $x \in c_0$.

- (b) Pokazać, że każdy liniowy i ciągły funkcjonal na c_0 jest postaci

$$\varphi_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

dla pewnego $y \in \ell_1$.

- (c) Wywnioskować, że $(c_0)^* = \ell_1$.

Zadanie 3. Przeprowadzić podobne rozumowanie dla przestrzeni c , tzn.:

- (a) Pokazać, że każde $y \in \ell_1$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ zadaje liniowy i ciągły funkcjonal na c wzorem

$$\varphi_{y,\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

dla każdego $x \in c_0$.

- (b) Pokazać, że każdy liniowy i ciągły funkcjonal na c_0 jest postaci

$$\varphi_{y,\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

dla pewnego $y \in \ell_1$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (c) Wywnioskować, że $(c_0)^* = \ell_1$.