

Analiza funkcjonalna - zadania domowe na 10.10.2025

Zadanie 1. Czy przestrzeń $C^1[0, 1]$ wyposażona w normy

- (a) $|f(0)| + \|f'\|_\infty$;
- (b) $\|f\|_\infty + \sup_{x \in (0,1)} |xf'(x)|$

jest przestrzenią Banacha?

Zadanie 2. Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną. Niech (a_n) będzie ciągiem Cauchy'ego w X , który ma podciąg zbieżny do pewnego $a \in X$. Wykazać, że cały ciąg (a_n) również jest zbieżny do a .

Zadanie 3. Niech ℓ_∞ będzie przestrzenią ciągów ograniczonych, tzn.

$$\ell_\infty := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\}$$

(standardowo jest ona wyposażona w normę supremum). Znaleźć dwie nierównoważne normy na tej przestrzeni.

Zadanie 4. Wykazać, że na przestrzeni ℓ_∞ topologia dyskretna i topologia produktowa nie są równoważne.

Zadanie 5. Niech X będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych określonych na $[0, +\infty)$. Definiujemy na X następujące dwie normy: jeśli $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, to

$$\|f\|_1 := \sum_{k=0}^n |a_k|; \quad \|f\|_2 := \sup_{x \geq 0} |f(x)|e^{-x}.$$

- (a) Sprawdzić, że powyższe wzory faktycznie definiują normy na X .
- (b) Czy są one równoważne?
- (c) Czy $(X, \|\cdot\|_1)$ jest przestrzenią Banacha?
- (d) Czy $(X, \|\cdot\|_2)$ jest przestrzenią Banacha?